

-1-
Musterprüfung

Thema: • Vektoren
• Kreise

1.) Wie gross ist der Betrag von \vec{a} , wenn

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$?

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$?

2.) Berechne die Linearkombination $u \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ für

a) $u = 2$ und $v = -3$

b) $u = -2$ und $v = 5$

3.) Bestimme Einheitsvektoren, die parallel zu

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$

verlaufen (gleiche Richtung!)

4.) Bestimme Vektoren vom Betrag 2, die zu

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

kollinear sind.

5.) Bestimme Vektoren vom Betrag 3, die zu

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

senkrecht stehen.

6.) Bestimme einen Vektor, der zur Geraden

a) $y = 2x - 3$

b) $y = -x + 4$

c) $2x - 3y + a = 0$

parallel verläuft. Betrag des Vektors beliebig!

7.) Bestimme Vektoren mit Betrag 2, die zur Geraden

a) $y = 3x - a$

b) $y = 2x - 3$

c) mit Steigungswinkel 40°

d) $y = 4$

e) $x = 3$

senkrecht stehen.

8.) An einen Kreis k mit Mittelpunkt M und Radius r soll eine Tangente gelegt werden, die parallel zur Geraden g verläuft. Bestimme Berührungspunkte von solchen Tangenten an den Kreis k , wenn

a) $M(-3, 5)$, $r = 3$ und $g: y = 2x$

b) $M(2, -4)$, $r = 5$ und $g: y = \frac{x}{2} + 5$

c) $M(-1, 6)$, $r = 4$ und g : Steigungswinkel $= -50^\circ$

d) $M(2, -3)$, $r = 5$ und $g: 3x - 2y + c = 0$

9.) An einen Kreis k mit Mittelpunkt M und Radius r sollen Tangenten gelegt werden, die senkrecht zur Geraden g stehen. Bestimme Berührungspunkte von solchen Tangenten an den Kreis k , wenn

a) $M\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $r=4$ und $g: y=2x$

b) $M\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$, $r=5$ und $g: y=\frac{x}{2}-999$

c) $M\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$, $r=4$ und $g: \text{Steigungswinkel}=60^\circ$

d) $M\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $r=5$ und $g: 2x-y+7820=0$

10.) Die Gerade g ist eine Tangente an den Kreis k mit Radius r . Der Berührungspunkt B auf g ist jeweils mit nur einer Koordinate gekennzeichnet. Die andere Koordinate muss berechnet werden. Wo befindet sich der Mittelpunkt des Kreises k , wenn

a) $B\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ ? \end{smallmatrix}\right)$, $r=4$ und $g: y=2x+1$

b) $B\left(\begin{smallmatrix} ? \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$, $r=3$ und $g: y=\frac{x}{2}+1$

c) $B\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ ? \end{smallmatrix}\right)$, $r=4$ und $g: y=-2x+3$

d) $B\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ ? \end{smallmatrix}\right)$, $r=2$ und $g: y=3x-2$

e) $B\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ ? \end{smallmatrix}\right)$, $r=3$ und $g: y=2x-3$

Musterlösungen

1. a) 13. (b) 5

2. a) $\begin{pmatrix} -9 \\ 8 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 11 \\ 16 \end{pmatrix}$

3. a) $\begin{pmatrix} 5/\sqrt{34} \\ -3/\sqrt{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8575 \\ -0.5145 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 7/\sqrt{53} \\ -2/\sqrt{53} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9615 \\ -0.2747 \end{pmatrix}$

4. a) $\begin{pmatrix} 4/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.7889 \\ 0.8944 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -4/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.7889 \\ -0.8944 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -4/\sqrt{13} \\ 6/\sqrt{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.1094 \\ 1.6641 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4/\sqrt{13} \\ -6/\sqrt{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1094 \\ -1.6641 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -2/\sqrt{17} \\ 8/\sqrt{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4851 \\ 1.9403 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2/\sqrt{17} \\ -8/\sqrt{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4851 \\ -1.9403 \end{pmatrix}$

5. a) $\begin{pmatrix} 12/5 \\ 9/5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -12/5 \\ -9/5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3/\sqrt{5} \\ 6/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.3416 \\ 2.6833 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -3/\sqrt{5} \\ -6/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.3416 \\ -2.6833 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 15/\sqrt{29} \\ 6/\sqrt{29} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.7854 \\ 1.1142 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -15/\sqrt{29} \\ -6/\sqrt{29} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.7854 \\ -1.1142 \end{pmatrix}$

6. a) $c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$. (b) $c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. (c) $c \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$

7. a) $\begin{pmatrix} -6/\sqrt{10} \\ 2/\sqrt{10} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 6/\sqrt{10} \\ -2/\sqrt{10} \end{pmatrix}$, d.h. $\begin{pmatrix} -1.8974 \\ 0.6325 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1.8974 \\ -0.6325 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -4/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$, d.h. $\begin{pmatrix} -1.7889 \\ 0.8944 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1.7889 \\ -0.8944 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 \cdot \cos(-50^\circ) \\ 2 \cdot \sin(-50^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2856 \\ -1.5321 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \cdot \cos(-50^\circ) \\ -2 \cdot \sin(-50^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.2856 \\ 1.5321 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

* Der Faktor c ist beliebig. Die Lösung ist richtig wenn er fehlt.

$$8. a) \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \pm \frac{3}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow B_1 \begin{pmatrix} -5.6833 \\ 6.3416 \end{pmatrix} \text{ und } B_2 \begin{pmatrix} -0.3167 \\ 3.6584 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \pm \frac{5}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow B_1 \begin{pmatrix} -0.2361 \\ 0.4721 \end{pmatrix} \text{ und } B_2 \begin{pmatrix} 4.2361 \\ -8.4721 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} \pm 4 \begin{pmatrix} \cos 40^\circ \\ \sin 40^\circ \end{pmatrix} \rightarrow B_1 \begin{pmatrix} 2.0642 \\ 8.5712 \end{pmatrix} \text{ und } B_2 \begin{pmatrix} -4.0642 \\ 3.4288 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \pm \frac{5}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow B_1 \begin{pmatrix} -2.1603 \\ -0.2265 \end{pmatrix} \text{ und } B_2 \begin{pmatrix} 6.1603 \\ -5.7735 \end{pmatrix}$$

$$9. a) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \pm \frac{4}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow B_1 \begin{pmatrix} 2.7889 \\ 2.5777 \end{pmatrix} \text{ und } B_2 \begin{pmatrix} -0.7889 \\ -4.5777 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \pm \sqrt{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow B_1 \begin{pmatrix} 4.4721 \\ -0.7639 \end{pmatrix} \text{ und } B_2 \begin{pmatrix} -4.4721 \\ -5.2361 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \pm 4 \begin{pmatrix} \cos 60^\circ \\ \sin 60^\circ \end{pmatrix} \rightarrow B_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1.4641 \end{pmatrix} \text{ und } B_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -5.4641 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \pm \sqrt{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow B_1 \begin{pmatrix} -0.7639 \\ 6.4721 \end{pmatrix} \text{ und } B_2 \begin{pmatrix} -5.2361 \\ -2.4721 \end{pmatrix}$$

$$10. a) B \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \pm \frac{4}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow B_1 \begin{pmatrix} -0.5777 \\ 8.7889 \end{pmatrix} \text{ und } B_2 \begin{pmatrix} 6.5777 \\ 5.2111 \end{pmatrix}$$

$$b) B \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \pm \frac{3}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow B_1 \begin{pmatrix} 6.6584 \\ 7.6833 \end{pmatrix} \text{ und } B_2 \begin{pmatrix} 9.3416 \\ 2.3167 \end{pmatrix}$$

$$c) B \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \pm \frac{4}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow B_1 \begin{pmatrix} 5.5777 \\ 0.7889 \end{pmatrix} \text{ und } B_2 \begin{pmatrix} -1.5777 \\ -2.7889 \end{pmatrix}$$

$$d) B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \pm \frac{\sqrt{2}}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow B_1 \begin{pmatrix} -0.8974 \\ 1.6325 \end{pmatrix} \text{ und } B_2 \begin{pmatrix} 2.8974 \\ 0.3675 \end{pmatrix}$$

$$e) B \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \pm \frac{3}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow B_1 \begin{pmatrix} 1.3167 \\ 6.3416 \end{pmatrix} \text{ und } B_2 \begin{pmatrix} 6.6833 \\ 3.6584 \end{pmatrix}$$