Musterprüfung für die Abschlussprüfung

Teil A: Kurzaufgaben

Aufgabe A.1: (6 Punkte)

Bestimme die Lösungsmenge von $6^{x-1} = 8 \cdot 3^{2x-5}$

Aufgabe A.2: (6 Punkte)

Bestimme die erste Ableitung von

a) $y(x) = (x^2 - 2)^{10}$

b) $y(x) = \frac{e^x}{x^2}$

Aufgabe A.3: (6 Punkte)

Bestimme den Parameter a in der Funktion $y(x) = ax^2 - 5x$ so, dass der Graph der Funktion an der Stelle $x = 2$ die Steigung 7 hat.

Aufgabe A.4: (6 Punkte)

An welcher Stelle ($x = ?$) hat die Normalparabel $p: y = x^2$ die gleiche Steigung wie die Gerade g, wenn $g: y = 5 - 8x$?

Aufgabe A.5: (6 Punkte)

An welcher Stelle haben die Graphen von $k_1: y = 2x^2$ und $k_2: y = 9x - x^2$ die gleiche Steigung?

Aufgabe A.6: (6 Punkte)

Berechne Schnittpunkte und Schnittwinkel der Funktionen $k_1: y = \frac{1}{4} x^3$ und $k_2: y = x^2$ für $x > 0$.

Aufgabe A.7: (6 Punkte)

Wie gross ist die Steigung der Wendetangenten von $k: y = x^3 - 6x^2 + 7$?

Aufgabe A.8: (6 Punkte)

Welche Fläche schliessen die x-Achse und der Graph der Funktion $k: y(x) = 15 - 2x - x^2$ ein?

Aufgabe A.9: (6 Punkte)

Wenn man die Fläche unter der Kurve von $k: y = \sqrt{a - x}$ für $x > 0$ um die x-Achse dreht, so soll ein Rotationskörper mit einem Volumen 18π entstehen. Wie gross ist dann a?

Teil B: Umfangreiche Aufgaben

Aufgabe B.1: (12 Punkte)

Zwei Funktionen wie folgt: k_1: $y = a - x^2$ und k_2: $y = x^2 - a$ sollen sich rechtwinklig schneiden. Wie gross muss dann der Parameter a sein? Berechne auch die Schnittpunkte.

Aufgabe B.2: (12 Punkte)

Bestimme die erste und zweite Ableitung von

a) $y(x) = x^3 – ax^2$ und bestimme den Formparameter a so, dass der Graph der Funktion an der Stelle $x = 2$ einen Wendepunkt hat. Bestimme die erste und zweite Ableitung erneut für den berechneten Wert von a.

b) $y(x) = x^3 – ax^2 + bx$ und bestimme die Formparameter a und b so, dass der Graph der Funktion an der Stelle $x = 2$ ein Extremum und an der Stelle $x = 5$ einen Wendepunkt hat. Bestimme die erste und zweite Ableitung erneut für die berechneten Werte von a und b.

Aufgabe B.3: (12 Punkte)

Eine oben offene quaderförmige Schachtel aus Blech mit quadratischer Grundfläche soll einen Rauminhalt von $96\,\text{dm}^3$ aufweisen. Bestimme die Seitenlänge x der quadratischen Grundfläche, sowie die Höhe h der Blechschachtel so, dass die Materialkosten möglichst klein werden, wenn das Material für den Boden der Schachtel drei Mal teurer ist als das Material für die Seitenwände.

Aufgabe B.4: (12 Punkte)

Eine ganzrationale Funktion dritten Grades geht durch den Koordinatenursprung und hat einen Wendepunkt $W\binom{2}{2}$. Die Wendetangente schneidet die y-Achse auf der Höhe $y = -2$. Bestimme die Funktionsgleichung.

Aufgabe B.5: (12 Punkte)

Bestimme Punkte mit horizontalen Tangenten des Graphen von $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7$.
Bestimme den Flächeninhalt der beschränkten Fläche, welche die horizontale Tangente im Tiefpunkt und der Graph von f einschliessen.

Musterlösungen (Abschlussprüfung)

A.1.) $(x-1)\lg 6 = \lg 8 + (2x-5)\lg 3 \to x(2\lg 3 - \lg 6) = 5\lg 3 - \lg 6 - \lg 8$

$\to x = (5\lg 3 - \lg 6 - \lg 8)/(2\lg 3 - \lg 6) = \underline{\underline{4}}$

A.2. a) $y' = 10(x^2-2)^9 \cdot (2x) = \underline{\underline{20x(x^2-2)^9}}$

b) $y' = \dfrac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \underline{\underline{\dfrac{e^x}{x^3}(x-2)}}$

A.3.) $y'(x) = 2ax - 5 \to y'(2) = 4a - 5 = 7 \to \underline{\underline{a=3}}$

A.4) $y'(x_0) = -8 \to y'(x) = 2x \to \underline{\underline{x_0 = -4}}$

A.5.) $y_1' = 4x = y_2' = 9 - 2x \to 6x = 9 \to \underline{\underline{x = 3/2}}$

A.6.) $1/4\, x^3 = x^2 \to x = 4 \to y = x^2 = 16 \to \underline{\underline{S\binom{4}{16}}}$

$y_1' = 3/4\, x^2$ und $y_2' = 2x$

$\varphi = |\arctan y_1'(4) - \arctan y_2'(4)| = |\arctan 12 - \arctan 8|$

$= |85.236° - 82.875°| = \underline{\underline{2.36°}}$

A.7.) $y' = 3x^2 - 12x,\ y'' = 6x - 12 = 0 \to x = 2 \to \underline{\underline{y'(2) = -12}}$

A.8.) $y(x) = (x+5)\cdot(3-x) \to A = \int_{-5}^{3} (15 - 2x - x^2)\,dx$

$= \left[15x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{-5}^{3} = 15\cdot 3 - 3^2 - \frac{27}{3} - \left[15\cdot(-5) - 5^2 - \frac{(-5)^3}{3}\right]$

$= 45 - 9 - 9 + 75 + 25 - 125/3 = 256/3 = \underline{\underline{85.333}}$

A.9.) $V = \pi \int_0^a (\sqrt{a-x})^2 dx = \pi \int_0^a (a-x)\,dx = \pi\left(ax - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^a = \frac{\pi a^2}{2} = 18\pi$

$\to a^2 = 36 \to \underline{\underline{a = 6}}$

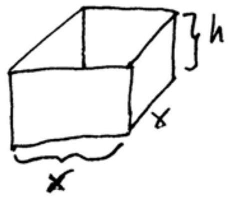
B.1.) $y_1' = -2x = -1/y_2' = -1/(2x) \to (2x)^2 = 1 \to x = \pm 1/2$ $\quad \left.\begin{matrix} S_1\binom{-1/2}{0} \\ S_2\binom{1/2}{0} \end{matrix}\right\}$

$k_1 \cap k_2:\ a - x^2 = x^2 - a \to a = x^2 = \underline{\underline{1/4}}$

B.2. a) y'(x) = $3x^2$ – 2ax und y“(x) = 6x – 2a, y”(2) = 6 · 2 – 2a = 0 $\to$ a = 6.
y'(x) = $3x^2$ – 12x und y”(x) = 6x – 12

b) y'(x) = $3x^2$ – 2ax + b und y“(x) = 6x – 2a, y'(2) = 12 – 4a + b = 0 und
y“(5) = 6 · 5 – 2a = 0 $\to$ a = 6 · 5 / 2 = 15 und b = 4a – 12 = 4 · 15 – 12 = 48
y'(x) = $3x^2$ – 30x + 48 und y“(x) = 6x – 30

B.3.)



$V = x^2 h \rightarrow h = V/x^2$

Zielfunktion: $z = 3x^2 + 4xh = 3x^2 + \frac{4V}{x}$

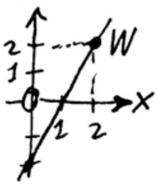
$\frac{dz}{dx} = 6x - \frac{4V}{x^2} = 0 \rightarrow 6x^3 = 4V \rightarrow x^3 = 4 \cdot 96\,dm^3/6$

$\rightarrow x = \underline{\underline{4dm}}$

B.4.) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Weil $O\binom{0}{0} \in$ Graph ist $d = 0$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

$y'' = 6ax + 2b = 2(3ax + b) = 0 \rightarrow b = -3ax = -3a \cdot 2 = -6a$



$y'(2) = 2 = 12a + 4b + c \rightarrow 2 = 12a + 4b + c$

$y(2) = 2 = 8a + 4b + 2c \;/ : 2$

$1 = 4a + 2b + c \rightarrow 1 = 4a + 2b + c$ $\Big\} -$

$1 = 8a + 2b$

$1 = 8a + 2 \cdot (-6a) = -4a$

$a = -1/4$

$b = -6a = 3/2$

$c = 1 - 4a - 2b = 1 + 1 - 3 = -1$

$\underline{\underline{y = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x}}$

B.5.) $y' = 3x^2 - 12x = 3x(x-4) \longrightarrow \underline{\underline{H\binom{0}{7}}}$ und $\underline{\underline{T\binom{4}{-25}}}$

$x^3 - 6x^2 + 7 = -25 \rightarrow x^3 - 6x^2 + 32 = 0$

$(x^3 - 6x^2 + 32) : (x^2 - 8x + 16) = x + 2 \rightarrow x = -2$

$\underline{x^3 - 8x^2 + 16x}$

$2x^2 - 16x + 32$

$\underline{2x^2 - 16x + 32}$

0

$A = \int_{-2}^{4} (x^3 - 6x^2 + 32)\,dx = \left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 32x\right)\Big|_{-2}^{4}$

$A = \frac{256}{4} - 2 \cdot 64 + 32 \cdot 4 - \left[\frac{(-2)^4}{4} - 2(-2)^3 + 32(-2)\right] = \underline{\underline{108}}$