Musterprüfung für die Abschlussprüfung

(Feb. 2011)

Teil A: Kurzaufgaben

Aufgabe A.1: (6 Punkte)

Bestimme die Lösungsmenge von $35^{x-1} = 49 \cdot 5^{3x-7}$

Aufgabe A.2: (6 Punkte)

Bestimme die erste Ableitung von

a) $y(x) = x^3 - 8x$ an der Stelle $x = 4$

b) $y(x) = x^5 + x^3$ an der Stelle $x = 3$

Aufgabe A.3: (6 Punkte)

Bestimme die Parameter a und b in der Funktion $y(x) = ax^2 – bx$ so, dass der Graph der Funktion an der Stelle $x = 2$ eine Nullstelle und an der Stelle $x = 3$ die Steigung 4 hat.

Aufgabe A.4: (6 Punkte)

Die Funktionsgleichung der Geraden g lautet $y = 4x – q$. Bestimme die Grösse q so, dass g die Normalparabel $p: y = x^2$ berührt.

Aufgabe A.5: (6 Punkte)

Für welche positiven x-Koordinate $(x > 0)$ ist die Steigung der kubischen Funktion $k: y = x^3$ drei Mal so gross wie die Steigung der Normalparabel $p: y = x^2$?

Aufgabe A.6: (6 Punkte)

Berechne Schnittpunkte und Schnittwinkel der Funktionen k_1: $y = \frac{1}{4} x^3$ und k_2: $y = x$ für $x > 0$.

Aufgabe A.7: (6 Punkte)

Bestimme die Wendestelle (x = ?) und die Steigung der Wendetangenten der kubischen Funktion k: $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$?

Aufgabe A.8: (6 Punkte)

Wie gross ist der Flächeninhalt der Fläche die von den Graphen der Parabel p: $y(x) = x^2 - 3x$ und der Geraden g: $y = x$ eingeschlossen wird?

Aufgabe A.9: (6 Punkte)

Bestimme in der Parabel p: $y = a^2 - x^2$ den Parameter a so, dass sie mit der x-Achse eine Fläche mit dem Flächeninhalt 36 einschliesst.

Aufgabe A.10: (6 Punkte)

Bestimme a so, dass $\int_{-2a}^{a} (a^3 - x^3)\, dx = 108$.

Teil B: Umfangreiche Aufgaben

Aufgabe B.1: (12 Punkte)

Die Gerade g schneidet die Parabel p: $y = x^2 / 10$ an der Stelle $x = 5$ rechtwinklig.
Welche Fläche schliessen g und p ein?

Aufgabe B.2: (12 Punkte)

Der Graph einer ganzrationale Funktion dritten Grades $k\colon y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ geht durch den Koordinatenursprung. Die Wendetangente hat eine Steigung von -7 und berührt k im Punkt $B\begin{pmatrix}1\\-6\end{pmatrix}$. Bestimme a, b, c und d.

Aufgabe B.3: (12 Punkte)

Die Gerade g hat die Steigung 4 und schneidet die Normalparabel $p: y = x^2$ an der Stelle $x = -1$. Wie gross ist der Flächeninhalt der Fläche, die von der Geraden g und der Normalparabel eingeschlossen wird?

Aufgabe B.4: (12 Punkte)

Eine Gerade t_1 und die Normalparabel p: $y = x^2$ berühren sich an der Stelle $x = -1$. Eine zweite Tangente t_2 an p schneidet t_1 im Punkt S senkrecht. Bestimme S.

Aufgabe B.5: (12 Punkte)

Der Graph der Funktion k: $y = ax^3 + bx^2 + c$ berührt die Gerade g: $y = -9x$ an der Stelle $x = 3$ und schneidet sie im Koordinatenursprung.

a) Bestimme a, b und c.

b) Bestimme den Flächeninhalt der Fläche, die k und g einschliessen.

Musterlösungen

A.1) $35^x/35=(49/5^7)\cdot 5^{3x} \to (35/5^3)^x = 49\cdot 35/5^7 \to$
$x=\lg(343/5^6)/\lg(7/25)=\underline{3}$

A.2. a) $y'(x)=3x^2-8 \to y'(4)=3\cdot 4^2-8=\underline{\underline{40}}$
b) $y'(x)=5x^4+3x^2 \to y'(3)=\underline{\underline{432}}$

A.3) $y'(x)=2ax-b \to y'(3)=6a-b=4$ und $y(2)=4a-2b=$
$2(2a-b)=0 \to b=2a;\ 6a-b=6a-2a=4a=4 \to \underline{\underline{a=1,\ b=2}}$

A.4) $y'(x)=2x=4 \to x=2,\ y(2)=2^2=4 \to B\binom{2}{4}\in g: 4=4\cdot 2-q$
$\to \underline{\underline{q=4}}$

A.5) $k: y'=3x^2,\ p: y'=2x \to 3x^2=3\cdot 2x \to \underline{x=2}$

A.6) $k_1\cap k_2: \frac{1}{4}x^3=x \to x(x^2-4)=0 \to x=2 \to \underline{\underline{S\binom{2}{2}}},$
$k_1: y'=\frac{3}{4}x^2 \to y'(2)=3;\ k_2: y'=1 \to \varphi=|\arctan 3-\arctan 1|$
$=|71.565^\circ-45^\circ|=\underline{\underline{26.565^\circ}}$

A.7) $k: y'=3x^2-6x+2,\ y''=6x-6=0 \to \underline{\underline{x_w=1}}$
$y'(x_w)=y'(1)=\underline{\underline{-1}}$

A.8) $x=x^2-3x \to 4x-x^2=x(4-x)=0 \to x_1=0$ und $x_2=4$
$\int_0^4(4x-x^2)\,dx=(2x^2-x^3/3)\Big|_0^4=2\cdot 16-64/3=\underline{\underline{32/3}}$

A.9) $\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,dx=(a^2x-x^3/3)\Big|_{-a}^{a}=a^3-\frac{a^3}{3}-\left(-a^3+\frac{a^3}{3}\right)=\frac{4}{3}a^3$
$=36 \to a^3=27 \to \underline{a=3}$

A.10) $\int_{-2a}^{a}(a^3-x^3)\,dx=\left(a^3x-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-2a}^{a}=a^4-\frac{a^4}{4}-\left(-2a^4-4a^4\right)=\frac{27}{4}a^4$
$=108 \to a^4=16 \to \underline{\underline{a=\pm 2}}$

B.1) $p: y'=x/5;\ y'(5)=1,\ y(5)=5/2 \to g: y=-1\cdot(x-5)+5/2$
$=-x+15/2;\ g\cap p: x^2/10=-x+15/2 \to x^2+10x-75=0$
$\to x=-5\pm 10 \to A=\int_{-15}^{5}\left(\frac{15}{2}-x-\frac{x^2}{10}\right)dx=\left(\frac{15}{2}x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{30}\right)\Big|_{-15}^{5}$
$=\frac{75}{2}-\frac{25}{2}-\frac{25}{6}-\left(-\frac{225}{2}-\cancel{\frac{225}{2}}+\cancel{\frac{225}{2}}\right)=\underline{\underline{\frac{400}{3}}}$

B.2) $y(0)=0 \rightarrow \underline{\underline{d=0}}$. $k: y'=3ax^2+2bx+c$, $y''=6ax+2b = 2(3ax+b)$, $y''(1)=2(3a+b)=0 \rightarrow b=-3a$, $y'(1)=3a+2b+c = c-3a=-7$, $y(1)=a+b+c=c-2a=-6 \rightarrow c=2a-6=3a-7 \rightarrow \underline{\underline{a=1}}$, $b=-3a=\underline{\underline{-3}}$ und $c=2a-6=\underline{\underline{-4}}$

B.3) $p: y(-1)=(-1)^2=1$; $g: y=4x+q$; $P\binom{-1}{1}\in g: 1=4\cdot(-1)+q \rightarrow q=5$
$g: y=4x+5$; $g\cap p: x^2-4x-5=(x-5)\cdot(x+1)=0 \rightarrow x_1=5, x_2=-1$
$\int_{-1}^{5}[5+4x-x^2]dx = \left(5x+2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{5} = 25+50-\frac{125}{3}+5-2-\frac{1}{3} = \underline{\underline{36}}$

B.4) $p: y'=2x$, $y'(-1)=-2$; $B_1\binom{-1}{1}\in t_1: y=1=-2\cdot(-1)+q_1 \rightarrow q_1=-1$
$t_1: y=-2x-1$; $t_2: y=\frac{x}{2}+q_2$; $p: y'=2x=\frac{1}{2} \rightarrow x=1/4$, $y=x^2=1/16$
$B_2\binom{1/4}{1/16}\in t_2: \frac{1}{16}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+q_2 \rightarrow q_2=-\frac{1}{16} \rightarrow t_2: y=\frac{x}{2}-\frac{1}{16}$
$t_1\cap t_2: -2x-1=\frac{x}{2}-\frac{1}{16} \rightarrow \frac{5}{2}x=-\frac{15}{16} \rightarrow x=-3/8$, $y=+6/8-1=-1/4$
$\underline{\underline{S\binom{-3/8}{-1/4}}}$

B.5 a) $y(0)=0 \rightarrow \underline{\underline{c=0}}$, $y(3)=27a+9b=-27 \rightarrow 3a+b=-3$;
$y'(x)=3ax^2+2bx \rightarrow y'(3)=27a+6b=-9 \rightarrow 3a+\frac{2}{3}b=-1$
$\rightarrow 3a=-b-3=-\frac{2}{3}b-1 \rightarrow \underline{\underline{b=-6}}$, $a=(-b-3)/3=(6-3)/3=\underline{\underline{1}}$

b) $A=\int_0^3(x^3-6x^2+9x)\,dx = \left(\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{9x^2}{2}\right)\Big|_0^3 = \frac{81}{4}-54+\frac{81}{2} = \underline{\underline{\frac{27}{4}}}$