

Kurvendiskussion

Für folgende Funktion

$$f(x) = \frac{x^4 - 4x^3}{9}$$

bestimme

- Nullstellen
- Extrema / Terrassenpunkte
- Wendepunkte
- Intervalle, in denen die Funktion monoton fallend ist

Erstelle eine grobe Skizze des Graphen.

Lösung:

$$f(x) = \frac{1}{9}(x^4 - 4x^3) = \frac{x^3}{9}(x-4)$$

$$f'(x) = \frac{1}{9}(4x^3 - 12x^2) = \frac{4x^2}{9}(x-3)$$

$$f''(x) = \frac{1}{9}(12x^2 - 24x) = \frac{4}{3}x(x-2)$$

$$f'''(x) = \frac{1}{9}(24x - 24) = \frac{8}{3}(x-1)$$

Nullstellen: $\frac{x^3}{9}(x-4) = 0 \rightarrow \underline{x_1 = 0}$ und $\underline{x_2 = 4}$

Extrema: $\frac{4x^2}{9}(x-3) = 0 \rightarrow x_3 = 0$
 $f''(0) = 0$ u. $f'''(0) = -8/3 \neq 0$
 \rightarrow Terrassenpunkt TP(0)

$x_4 = 3 \rightarrow f''(3) = 4 > 0$
 $f(3) = \frac{3^3}{9}(3-4) = -3 \rightarrow \underline{T(3, -3)}$

Wendepunkte: $\frac{4}{3}x(x-2) = 0$
 $x_5 = 0$ \rightarrow Terrassenpunkt
 $x_w = 2$
 $f(x_w) = f(2) = -\frac{16}{9}$

