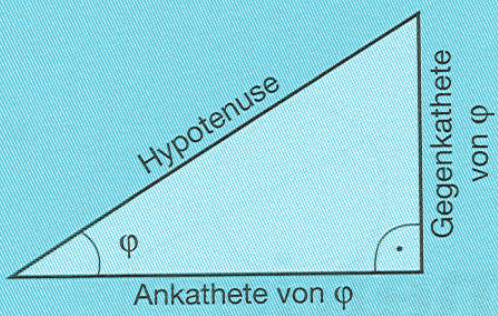
Aus „Mathematik für Mittelschulen“
Frommenwiler & Suter
ISBN 978-3-0345-0251-1

2.1 Das rechtwinklige Dreieck

Winkelfunktionen (0° < φ < 90°)

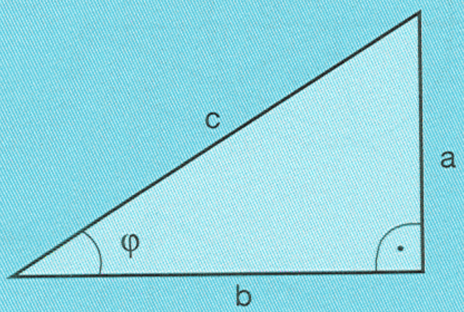


$$\sin\varphi = \frac{\text{Gegenkathete von } \varphi}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos\varphi = \frac{\text{Ankathete von } \varphi}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan\varphi = \frac{\text{Gegenkathete von } \varphi}{\text{Ankathete von } \varphi}$$

Arkusfunktionen



$$\sin\varphi = \frac{a}{c} \Rightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{a}{c}\right)$$

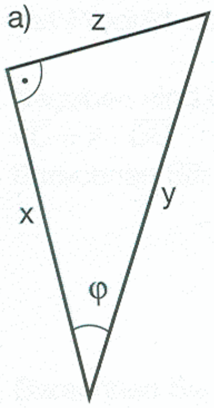
$$\cos\varphi = \frac{b}{c} \Rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{b}{c}\right)$$

$$\tan\varphi = \frac{a}{b} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$$

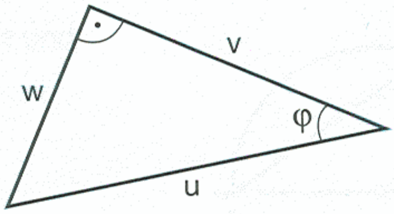
2.1.1 Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck

1. Bestimmen Sie sin φ, cos φ und tan φ.

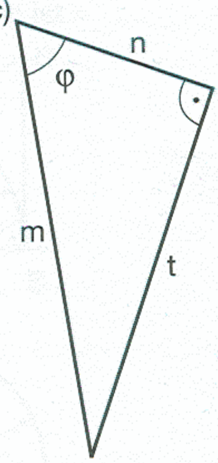
a)



b)



c)



Wenn Dreiecke einen Gott hätten, würden sie ihn mit drei Ecken ausstatten.
Charles-Lois, Baron de Montesquien, franz. Philosoph, 1689–1755

ISBN 978-3-0345-0251-1

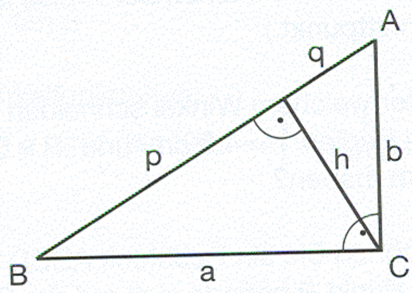
2. Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel.
(c ist immer die Hypotenuse)
a) $a = 8.9$ cm , $\beta = 34.8°$
b) $b = 12.0$ cm , $\beta = 21.8°$
c) $c = 11.04$ m , $\alpha = 50.1°$
d) $c = 22.3$ dm , $\beta = 34.3°$

3. In einem rechtwinkligen Dreieck ist folgendes Seitenverhältnis bekannt:
(c ist immer die Hypotenuse)
a) $a : c = 3 : 7$
b) $b : a = 2 : 3$
c) $b : c = 17 : 28$
d) $a : b = 1 : 38$
e) $a : c = 39 : 31$
Berechnen Sie α und β.

4. Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel.
(c ist immer die Hypotenuse)
a) $a = 1.25$ m , $b = 0.53$ m
b) $a = 4.2$ cm , $c = 7.5$ cm
c) $b = 13.7$ dm , $c = 14.2$ dm
d) $a = 11.5$ cm , $b = 25.3$ cm

5. Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel.
(c ist immer die Hypotenuse)
a) $b = 31.4$ cm , $\beta = 68.4°$
b) $c = 13.8$ m , $\alpha = 51.2°$
c) $a = 38.7$ cm , $c = 36.3$ cm
d) $c = 25.4$ dm , $\beta = 85.1°$
e) $a = 54.3$ cm , $b = 18.2$ cm

6. Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel des Dreiecks ABC.
a) $a = 5.5$ cm , $p = 2.7$ cm
b) $b = 297$ m , $h = 232.2$ m
c) $q = 4.15$ m , $h = 5.84$ m
d) $p = 2.20$ dm , $\alpha = 66.3°$
e) $h = 15.57$ m , $\beta = 33.4°$
f) $p = 34.3$ cm , $q = 26.2$ cm
g) $b = 14.32$ m , $p = 12.74$ m



7. Geben Sie den absoluten Fehler mit zwei geltenden Ziffern an.
(Beachten Sie: Der Mittelwert $\bar{x}$ und der Fehler Δx haben dieselbe Anzahl Dezimalen.)
a) $c = (52 \pm 1)$ cm , $\alpha = (76 \pm 1)°$
b) $c = (49.2 \pm 1.5)$ mm , $\alpha = (25.8 \pm 1.5)°$
c) $a = (20.1 \pm 0.5)$ m , $b = (12.0 \pm 0.5)$ m
d) $a = (82 \pm 1)$ cm , $c = (100 \pm 1)$ cm

$a = \bar{a} \pm \Delta a = ?$
$b = \bar{b} \pm \Delta b = ?$
$\alpha = \bar{\alpha} \pm \Delta\alpha = ?$
$\beta = \bar{\beta} \pm \Delta\beta = ?$

8. Bestimmen Sie exakt und ohne Rechner.
a) $\sin 45°$
b) $\tan 60°$
c) $\cos 30°$

9. Eine Ebene hat die Steigung 17 %. Berechnen Sie den Steigungswinkel.

ISBN 978-3-0345-0251-1

10. Ein Punkt P hat vom Mittelpunkt eines Kreises mit dem Radius r den Abstand 6.5r. Berechnen Sie den Winkel zwischen den beiden Tangenten durch P.

11. Von einem gleichschenkligen Dreieck mit der Basis c sind bekannt:
$h_c = 45.3$ dm, $\gamma = 131.5°$
Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel.

12. Berechnen Sie in einem Kreis mit dem Durchmesser d = 350 mm die Sehne zum Periferiewinkel $\alpha = 38.5°$.

13. Von einem Rhombus kennt man:
Seite s = 23.4 cm , Diagonale e = 30.3 cm
Berechnen Sie die andere Diagonale und die Winkel.

14. Ein gleichschenkliges Trapez mit den Parallelseiten a = 3.46 m und c = 2.18 m und der Schenkellänge s = 2.56 m ist gegeben.
Berechnen Sie die Höhe und die Basiswinkel.

15. Berechnen Sie die Länge der Winkelhalbierenden w_α eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn die Katheten a = 16.6 cm und b = 23.2 cm messen.

16. Unter welchem Winkel schneiden sich zwei Kreise mit den Radien 9.8 cm und 6.5 cm , wenn ihre gemeinsame Sehne 9 cm misst?
(Der Schnittwinkel zweier Kreise ist gleich dem Schnittwinkel ihrer Tangenten im Schnittpunkt.)

17. Unter welchem Winkel schneiden sich die gemeinsamen Tangenten zweier Kreise mit den Radien r = 4.5 cm und R = 5.5 cm , wenn die Kreismittelpunkte den Abstand 8 cm haben?

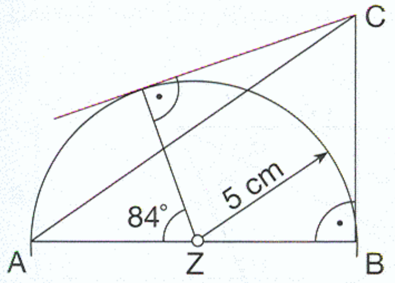
18. Zeichnen Sie ein Rechteck ABCD mit den Seiten $\overline{AB} = 14$ cm und $\overline{BC} = 3$ cm.
Der Punkt P befinde sich auf der Seite $\overline{AB}$ im Abstand 2 cm von A , der Punkt Q auf der Seite $\overline{CD}$ im Abstand 2 cm von C.
Spiegeln Sie das Rechteck ABCD an der Geraden PQ.
Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstückes, das die beiden Rechtecke gemeinsam haben.

19. Von einem Dreieck ABC sind die Höhe $h_c = 6.3$ cm , die Winkelhalbierende $w_\gamma = 6.8$ cm und der Winkel $\gamma = 70°$ gegeben.
Berechnen Sie die Seite c sowie die Winkel α und β.

20. Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Grundlinie von 70 dm und einer Schenkellänge von 55 dm.
Berechnen Sie den Abstand zwischen den Mittelpunkten von In- und Umkreis.

ISBN 978-3-0345-0251-1

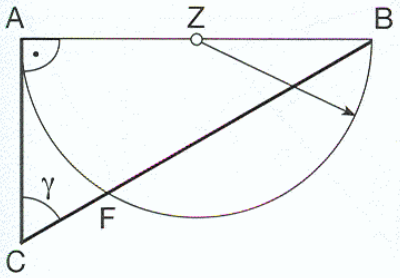
21.



Berechnen Sie $\overline{AC}$.

22. Der Inkreisradius eines Rhombus mit 15 cm Seitenlänge beträgt 6.5 cm.
Berechnen Sie die Winkel und die Länge der Diagonalen.

23.



In der Figur gilt:
$\overline{BF} : \overline{FC} = 4 : 1$

Berechnen Sie γ.

24. Im Dreieck ABC gilt: $\tan\alpha = 2.56$
Bestimmen Sie
a) $\sin\alpha$ b) $\cos\beta$ c) $\tan\beta$

25. Beweisen Sie mit Hilfe der Definition der Winkelfunktionen:
a) $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$; $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$ und $\tan(90° - \alpha) = \frac{1}{\tan\alpha}$

b) $\tan\alpha = \frac{\dots}{\dots}$

c) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

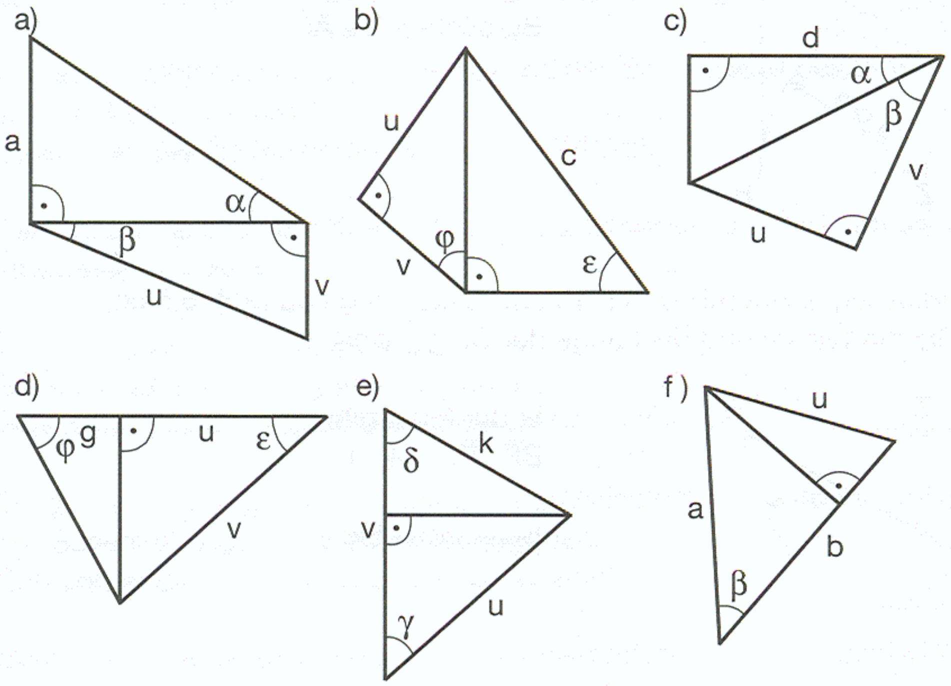
$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

Unzählige haben (vergebens) bewiesen, dass Beweise überflüssig sind. So etwa charakterisierte der schwedische Schriftsteller Johan August Strindberg (1849–1912) die Beweissucht der Mathematiker als ein artiges Spiel der Leute, die nichts zu tun haben.

Dabei stellte bereits Leonhard Euler (1707–1783) fest:
«Euklid hätte uns vergebens die schönsten Wahrheiten der Geometrie gezeigt, hätte er nicht zu unserer Überzeugung hinlängliche Beweise hinzugesetzt, denn auf sein Wort allein hätten wir uns niemals verlassen.»

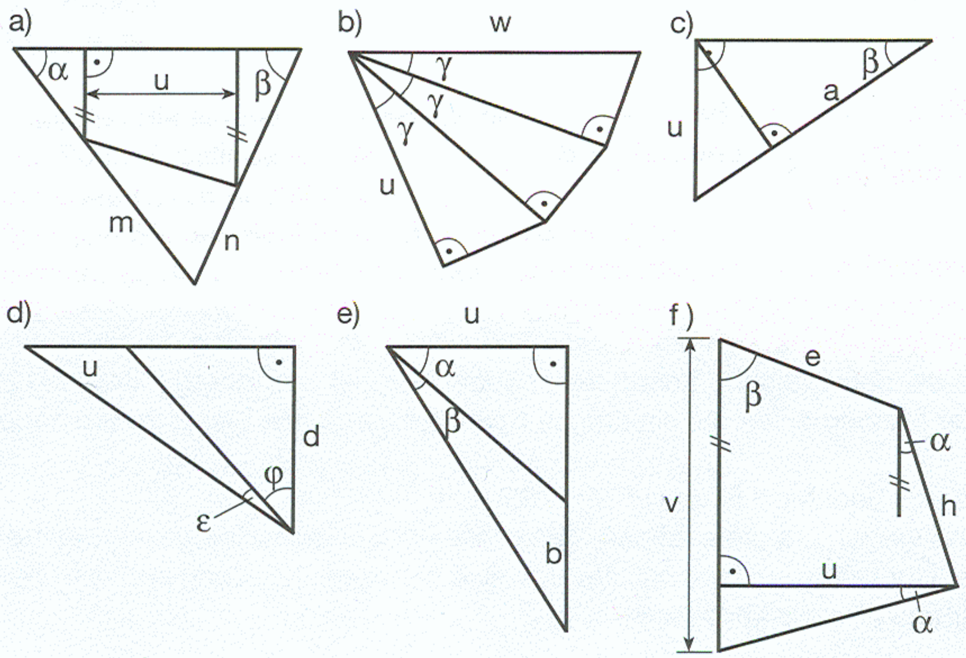
Aus „Mathematik für Mittelschulen“
Frommenwiler & Suter
ISBN 978-3-0345-0251-1

26. Berechnen Sie u und v.



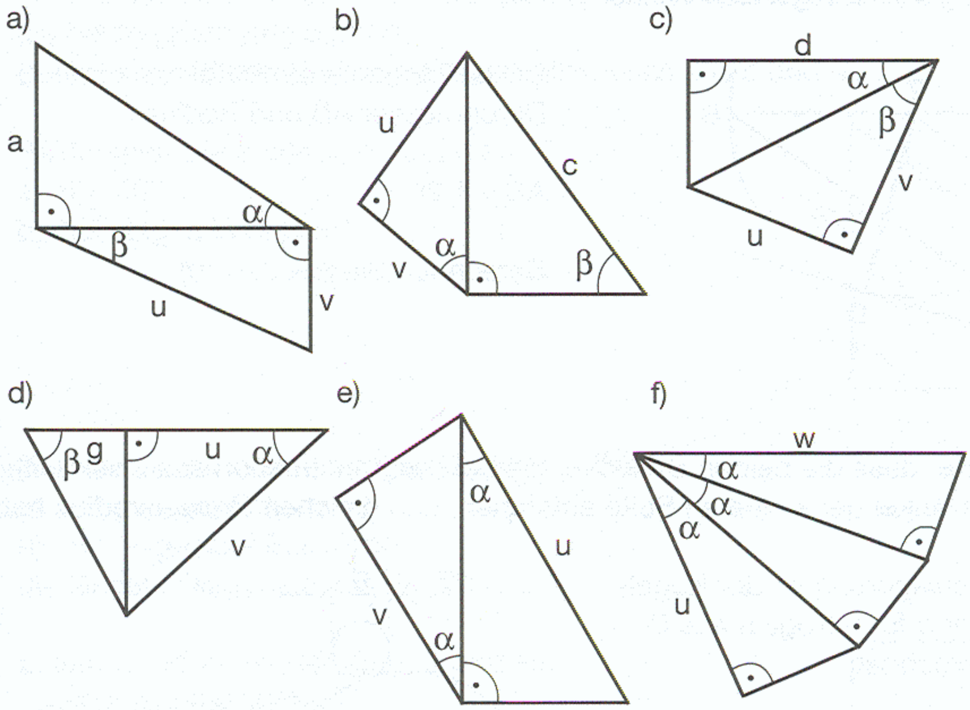
> Die Mathematik richtig verstanden, besitzt nicht allein Wahrheit, sondern auch höchste Schönheit – eine Schönheit, so kühl und streng wie die einer Plastik.
>
> Bertrand Russell, 1872–1970, Mathematiker und Philosoph

27. Berechnen Sie u und v.



Aus „Mathematik für Mittelschulen“
Frommenwiler & Suter
ISBN 978-3-0345-0251-1

28. Berechnen Sie jeweils α und β aus den übrigen Grössen.



29. Im Dreieck ABC gilt : $\tan\alpha = k$
Bestimmen Sie

a) $\sin\alpha$ b) $\cos\alpha$ c) $\tan\beta$ d) $\sin\beta$

Aufgaben mit Parametern

30. Von einem Kreissektor kennt man den Radius r und den Zentriwinkel ε.
Berechnen Sie die Sehne s und die Höhe h des Kreisbogens.

31. Von einem rechtwinkligen Dreick ist der Flächeninhalt A sowie der Winkel α bekannt.
Berechnen Sie die Länge der beiden Katheten.

32. Einem Kreissektor mit Radius R und Zentriwinkel α ($\alpha < 90°$) ist ein Kreis einbeschrieben. Berechnen Sie dessen Radius r.

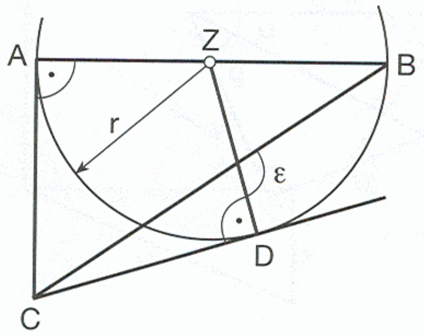
33. Von einem gleichschenkligen Trapez sind die beiden Parallelseiten a und c sowie der Winkel α bekannt.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes.

34. Der Winkel $\gamma = 65.3°$ an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks wird in drei gleiche Teilwinkel geteilt.
Berechnen Sie die Längen der drei Abschnitte, in die die Basis c zerlegt wird.

ISBN 978-3-0345-0251-1

35. Berechnen Sie in einem allgemeinen Dreieck ABC den Umkreisradius r aus der Seite c und dem gegenüberliegenden Winkel γ.

36.



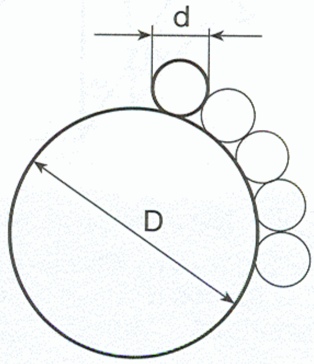
CD ist Tangente am Halbkreis mit Durchmesser AB und Radius r.

$\overline{AC} = 1.2r$

Berechnen Sie ε.

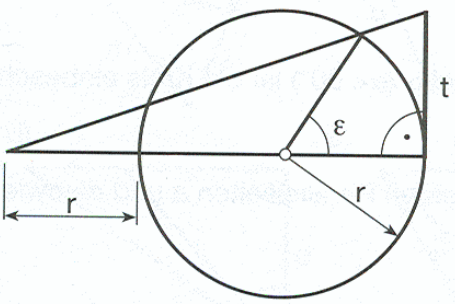
37. Beweisen Sie, dass die beiden Dreiecke, die bei der Konstruktion aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der kleineren Seite entstehen, den gleichen Umkreisradius haben.

38. In der Walzenlagerung ist der Kugeldurchmesser d für n Kugeln aus D und n zu berechnen.



39. Der Winkel zwischen den gemeinsamen
a) äusseren b) inneren
Tangenten zweier Kreise (Z_1 , R und Z_2 , r , wobei R>r) ist γ.
(Winkel, der von der Symmetrieachse halbiert wird)
Bestimmen Sie $s = \overline{Z_1Z_2}$.
Unter welchen Bedingungen ist eine Lösung möglich?

40.



Gegeben: r ; ε

Gesucht: t

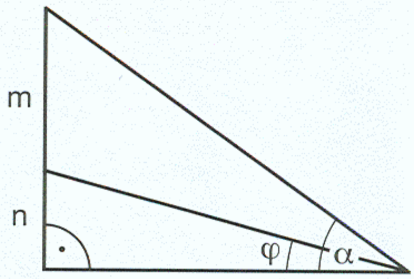
So kann also die Mathematik definiert werden als diejenige Wissenschaft, in der wir niemals das kennen, worüber wir sprechen, und niemals wissen, ob das, was wir sagen, wahr ist.

Bertrand Russell, 1872–1970, Mathematiker und Philosoph

ISBN 978-3-0345-0251-1

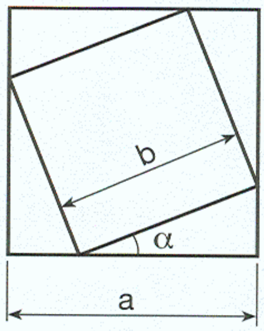
41. Ein rechtwinkliges Dreieck sei durch die Hypotenuse c und den Winkel α gegeben. In dieses Dreieck ist ein Halbkreis gezeichnet, dessen Mittelpunkt auf c liegt und der die beiden Katheten berührt.
Berechnen Sie den Radius r dieses Halbkreises aus c und α.

42. Bestimmen Sie φ aus α, m und n für
a) $\alpha = 45°$
b) beliebigen Winkel α.
($0° < \alpha < 90°$)



43. Berechnen Sie in einem regelmässigen n-Eck
a) mit gerader Eckenzahl
b) mit ungerader Eckenzahl
die längste Diagonale aus der Seite s.

44. Einem Quadrat mit der Seite a wird ein zweites einbeschrieben.
Bestimmen Sie die Seitenlänge b des eingeschriebenen Quadrates aus a und α.



Aus „Mathematik für Mittelschulen“
Frommenwiler & Suter
ISBN 978-3-0345-0251-1

Ergebnisse:

2.1 Das rechtwinklige Dreieck

2.1.1 Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck

1. a) $\sin\varphi = \frac{z}{y}$ $\cos\varphi = \frac{x}{y}$ $\tan\varphi = \frac{z}{x}$
b) $\sin\varphi = \frac{w}{u}$ $\cos\varphi = \frac{v}{u}$ $\tan\varphi = \frac{w}{v}$
c) $\sin\varphi = \frac{t}{m}$ $\cos\varphi = \frac{n}{m}$ $\tan\varphi = \frac{t}{n}$

2. a) b = 6.2 cm c = 10.8 cm α = 55.2°
b) a = 30.0 cm c = 32.3 cm α = 68.2°
c) a = 8.47 m b = 7.08 m β = 39.9°
d) a = 18.4 dm b = 12.6 dm α = 55.7°

3. a) α = 25.4° β = 64.6°
b) α = 56.3° β = 33.7°
c) α = 52.6° β = 37.4°
d) α = 1.51° β = 88.5°
e) keine Lösung

4. a) c = 1.36 m α = 67.0° β = 23.0°
b) b = 6.21 cm α = 34.1° β = 55.9°
c) a = 3.73 dm α = 15.2° β = 74.8°
d) c = 27.8 cm α = 24.4° β = 65.6°

5. a) a = 12.4 cm c = 33.8 cm α = 21.6°
b) a = 10.8 m b = 8.65 m β = 38.8°
c) keine Lösung
d) a = 2.17 dm b = 25.3 dm α = 4.9°
e) c = 57.3 cm α = 71.5° β = 18.5°

6. a) b = 9.76 cm c = 11.2 cm
α = 29.4° β = 60.6°
b) a = 372 m c = 476 m
α = 51.4° β = 38.6°
c) a = 10.1 m b = 7.16 m c = 12.4 m
α = 54.6° β = 35.4°
d) a = 2.40 dm b = 1.06 dm c = 2.62 dm
β = 23.7°
e) a = 28.3 m b = 18.7 m c = 33.9 m
α = 56.6°
f) a = 45.5 cm b = 39.8 cm c = 60.5 cm
α = 48.8° β = 41.2° (Höhensatz)
g) a = 16.8 m c = 22.0 m
α = 49.5° β = 40.5°

7. a) a = (50.5 ± 1.3) cm
b) b = (44.3 ± 2.0) mm
c) α = (59.2 ± 1.8)°
d) β = (34.9 ± 1.9)°

8. a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

9. 9.65°

10. 17.7°

11. a = b = 110 dm , c = 201 dm
$\alpha = \beta$ = 24.3°

12. 218 mm

13. 35.7 cm , 80.7° , 99.3°

14. h = 2.48 m , 75.5°

15. 24.4 cm

16. 2 Lösungen: 71.2° , 16.5°

17. äussere Tangenten: 14.4°
(keine inneren Tangenten)

18. 16.4 cm^2

19. c_1 = 11.2 cm , α_1 = 77.1° , β_1 = 32.9°
$c_2 = c_1$, $\alpha_2 = \beta_1$, $\beta_2 = \alpha_1$

20. 9.72 dm

21. 11.4 cm

22. 1. Lösung: e_1 = 26.0 cm , f_1 = 15.0 cm
α_1 = 60.1° , β_1 = 119.9°
2. Lösung: e_2 = 15.0 cm , f_2 = 26.0 cm
α_2 = 119.9° , β_2 = 60.1°

23. 63.4°

24. a) 0.931 b) 0.931 c) 0.391

25. Beweise

Aufgaben mit Parametern

26. a) $u = \frac{a}{\tan\alpha \cdot \cos\beta}$, $v = \frac{\tan\beta}{\tan\alpha} a$
b) $u = c \cdot \sin\varepsilon \cdot \sin\varphi$, $v = c \cdot \sin\varepsilon \cdot \cos\varphi$
c) $u = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha} d$, $v = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} d$

ISBN 978-3-0345-0251-1

d) $u = \frac{\tan\varphi}{\tan\varepsilon}\, g \quad , \quad v = \frac{\tan\varphi}{\sin\varepsilon}\, g$

e) $u = \frac{\sin\delta}{\sin\gamma}\, k \quad , \quad v = \left(\frac{\sin\delta}{\tan\gamma} + \cos\delta\right) k$

f) $u = \sqrt{(a \cdot \sin\beta)^2 + (b - a\cdot\cos\beta)^2}$

$= \sqrt{(b \cdot \sin\beta)^2 + (a - b\cdot\cos\beta)^2}$

27. a) $u = m \cdot \cos\alpha + n \cdot \cos\beta$

b) $u = w \cdot \cos^3\gamma$

c) $u = \frac{\tan\beta}{\cos\beta}\, a$

d) $u = (\tan(\varphi + \varepsilon) - \tan\varphi)\, d$

e) $u = \frac{b}{\tan(\alpha+\beta) - \tan\alpha}$

f) $u = h \cdot \sin\alpha + e \cdot \sin\beta \quad , \quad v = h \cdot \cos\alpha + e \cdot \cos\beta + (e \cdot \sin\beta + h \cdot \sin\alpha)\tan\alpha$

28. a) $\alpha = \arctan\left(\frac{a}{\sqrt{u^2 - v^2}}\right)$, $\beta = \arcsin\left(\frac{v}{u}\right)$

b) $\alpha = \arctan\left(\frac{u}{v}\right)$, $\beta = \arcsin\left(\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{c}\right)$

c) $\alpha = \arccos\left(\frac{d}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right)$, $\beta = \arctan\left(\frac{u}{v}\right)$

d) $\alpha = \arccos\left(\frac{u}{v}\right)$, $\beta = \arctan\left(\frac{\sqrt{v^2-u^2}}{g}\right)$

e) $\alpha = \arccos\left(\sqrt{\frac{v}{u}}\right)$

f) $\alpha = \arccos\left(\sqrt[3]{\frac{u}{w}}\right)$

29. a) $\sin(\arctan k) = 1 \Big/ \sqrt{1 + \left(\frac{1}{k}\right)^2}$

b) $\cos(\arctan k) = 1 \Big/ \sqrt{k^2 + 1}$

c) $\frac{1}{k}$

d) $\sin\left(\arctan \frac{1}{k}\right) = 1 \Big/ \sqrt{k^2+1}$

30. $s = 2\,r \cdot \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, $h = \left(1 - \cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) r$

31. $a = \sqrt{2\,A \tan\alpha}$, $b = \sqrt{2\,A / \tan\alpha}$

32. $r = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\, R$

33. $A = \frac{1}{4}\,(a^2 - c^2)\tan\alpha$

34. 0.300 c , 0.350 c

35. $r = \frac{c}{2\sin\gamma}$

36. 111°

37. Beweis

38. $d = \frac{\sin(180°/n)}{1 - \sin(180°/n)}\, D$

39. a) $s = \frac{R - r}{\sin(\gamma/2)}$, Lösung immer möglich

b) $s = \frac{R + r}{\sin(\gamma/2)}$, Lösung, falls $R + r < s$

40. $t = \frac{3 \cdot \sin\varepsilon}{2 + \cos\varepsilon}\, r$

41. $r = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}\, c = \frac{\sin\alpha}{1 + \tan\alpha}\, c$

42. a) $\gamma = \arctan\left(\frac{n}{m+n}\right)$

b) $\gamma = \arctan\left(\frac{n \cdot \tan\alpha}{m+n}\right)$

43. a) $\frac{s}{\sin(180°/n)}$

b) $\frac{s}{2 \cdot \sin(90°/n)}$

44. $\frac{a}{\sin\alpha + \cos\alpha}$

2.1.2 Aufgaben aus der Optik

45. 24.0 m

46. a) 33.4°

b) $\arctan\left(\frac{a+b}{\sqrt{s^2 - (a-b)^2}}\right)$

47. 41.2°

48. a) 42.9° b) 33.0°

49. 34.6°

50. a) 28.1° b) 30.7° c) 37.2°

51. 2.42

52. a) 48.6° b) 41.3°

53. a) 1.60 b) 38.7°

54. 1.47