

Fach: Mathematik II / Geometrie

Serie 1/2008

Zeit: 90 Minuten

Dieses Aufgabenblatt bleibt nach der Prüfung im Besitze der Studierenden und muss nicht mit den Lösungen abgegeben werden.

<u>Klassen</u>	Zulassungsstudium Beginn August 2007, Klassen 1,2 und 3
<u>Examinator</u>	Prof. Dr.h.c. Bedi Büktas, Rektor der Hochschule für Technik Zürich
<u>Erlaubte Hilfsmittel</u>	- Eine persönlich erstellte und/oder eine gedruckte Formelsammlung (handschriftliche Einträge ohne Lösungsansätze sind erlaubt) - Ein elektronischer Rechner
<u>Bewertungsschema</u>	Pro Aufgabe total 3 Punkte --> Maximal 24 Punkte

<u>Notengebung</u>	<u>Anzahl Punkte</u>	<u>Note</u>
(Anz. Punkte / 4 + 1)	24,23,22,21,20,19	6.0
	18,17	5.5
	16,15	5.0
	14,13	4.5
	12,11	4.0
	10,9	3.5
	8,7	3.0
	6,5	2.5
	4,3	2.0
	2,1	1.5
	0	1.0

<u>Wichtig</u>	- Bei jeder Aufgabe muss der Lösungsweg in allen Schritten nachvollziehbar sein, ansonsten die Aufgabe nicht bewertet würde - Erratene Lösungen werden nicht bewertet - Für jede Aufgabe ist ein separates Blatt zu verwenden - Die Lösungsblätter sind nur einseitig zu beschriften
----------------	---

### AUSZUG AUS DEM REGLEMENT

#### IV. PRÜFUNGSBESTIMMUNGEN, § 13 (Ausschluss von Zertifikatsprüfungen bzw. Gesamtprüfung)

Ein Ausschluss von den Prüfungen erfolgt, wenn

- der/die Studierende unerlaubte Hilfsmittel verwendet oder in anderer schwerwiegender Weise gegen die Prüfungsordnung verstösst
- der/die Studierende ohne zwingenden Grund einer Prüfung ganz oder teilweise fernbleibt
- sich auch nachträglich ein offenkundiger und belegbarer Betrug herausstellt.

Wird ein Ausschluss ausgesprochen, gilt die ganze Zertifikats- oder Gesamtprüfung als nicht bestanden. Die Studierenden werden ausdrücklich auf diese Bestimmungen aufmerksam gemacht.

### Aufgabe 1

In einem Dreieck ABC sind gegeben:  $b = 40$  cm,  $c = 30$  cm und  $\alpha = 25^\circ$ .  
Berechnen Sie den Winkel  $\beta$ .

### Aufgabe 2

In einem Dreieck ABC verhalten sich die Winkel  $\alpha : \beta : \gamma = 2 : 4 : 5$ .  
Berechnen Sie den Winkel, den die Winkelhalbierenden  $w_\beta$  und  $w_\gamma$  einschliessen.

### Aufgabe 3

Eine Gerade  $g$  geht durch  $A(12/-3/-2)$  und  $B(19/11/-3)$ . Eine Gerade  $h$  geht durch  $C(23/4/10)$  und  $D(25/11/7)$ .  
Berechnen Sie den Schnittpunkt von  $g$  und  $h$  (falls vorhanden).

### Aufgabe 4

In einem Dreieck ABC sind die Seite  $c = 16$  cm, die Winkelhalbierende  $w_\beta = 15$  cm und die Höhe  $h_a = 9$  cm lang. Berechnen Sie die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ .

### Aufgabe 5

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck so weit wie möglich:

$$\frac{\cos(2x) \cdot \tan(450^\circ - x)}{\cos(x - 540^\circ) \cdot \cos(-x)}$$

### Aufgabe 6

Berechnen Sie im Intervall  $0^\circ < x < 360^\circ$  sämtliche Lösungen der goniometrischen Gleichung:  $\cos(2x + 30^\circ) - \sin(15^\circ - x) = 0$

### Aufgabe 7

Berechnen Sie den kürzesten Abstand der Geraden  $n$ , die durch die Punkte  $G(3/23/3)$  und  $H(27/7/-13)$  geht, vom Punkt  $P(10/20/-8)$ .

### Aufgabe 8

Gegeben ist ein Quadrat ABCD:  $A(0/0)$ ,  $B(a/0)$ ,  $C(a/a)$  und  $D(0/a)$ .  
Berechnen Sie die Koordinaten eines innerhalb des Quadrates liegenden Punktes  $P$  so, dass  $PC : PB : PA = 3 : 4 : 5$  ist.

---

WIR WÜNSCHEN IHNEN VIEL ERFOLG !

---

$$1.) a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha} = \sqrt{40^2 + 30^2 - 2 \cdot 40 \cdot 30 \cdot \cos \alpha} \text{ cm} = 18.02 \text{ cm}$$

$$\beta = \arcsin(b \cdot \sin \alpha / a) = \begin{cases} 69.703^\circ \rightarrow \delta_1 = 85.3^\circ \\ 110.297^\circ \rightarrow \delta_2 = 44.7^\circ \end{cases}$$

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin 25^\circ}{18.02} = 0.0235 = \frac{\sin 110.3^\circ}{40} = \frac{\sin 44.7^\circ}{30} = \frac{\sin 85.3^\circ}{30}$$

→ nur eine Lösung  $\beta = 110.3^\circ$

$$2.) \alpha = \frac{2}{11} \cdot 180^\circ = 32.73^\circ, \beta = 2\alpha = 65.45^\circ, \delta = \frac{5}{11} \cdot 180^\circ = 81.82^\circ$$

$$180^\circ - \beta/2 - \delta/2 = 180^\circ - \frac{1}{2} \left( \frac{4}{11} + \frac{5}{11} \right) \cdot 180^\circ = 106.36^\circ \text{ (od. } 73.64^\circ)$$

$$3.) \vec{OA} + \lambda \vec{AB} = \vec{OC} + \epsilon \vec{CD} \rightarrow \lambda \vec{AB} - \epsilon \vec{CD} = \vec{OC} - \vec{OA} = \vec{AC}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -1 \end{pmatrix} - \epsilon \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 14\lambda - 4\epsilon = 22 \\ 14\lambda - 7\epsilon = 7 \end{cases}$$

$$3\epsilon = 15 \rightarrow \epsilon = 5$$

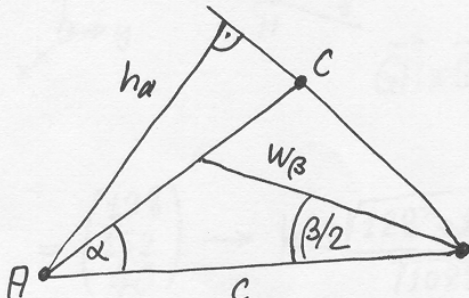
$$\lambda = 3\epsilon - 12 = 3$$

$$\begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 39 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 23 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 39 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{matrix} \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 39 \\ -5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 23 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 39 \\ -5 \end{pmatrix} \end{matrix} \right\} S \begin{pmatrix} 33 \\ 39 \\ -5 \end{pmatrix}$$

4.)



$$\beta = \arcsin(h_\alpha / c) = \arcsin(9/16) = 34.23^\circ$$

$$\frac{\sin \alpha}{W_\beta} = \frac{\sin(\delta - \alpha)}{c}, \text{ wobei } \delta = 180^\circ - \beta/2$$

$$\frac{c}{W_\beta} \sin \alpha = \sin \delta \cos \alpha - \cos \delta \sin \alpha$$

$$\rightarrow \sin \alpha / \cos \alpha = \tan \alpha = \frac{W_\beta \sin \delta}{c + W_\beta \cos \delta} = \frac{15 \cdot \sin 162.88^\circ}{16 + 15 \cdot \cos 162.88^\circ} = 2.652$$

$$\alpha = \arctan 2.652 = 69.34^\circ, \delta = 180^\circ - \alpha - \beta = 76.43^\circ$$

$$5.) \frac{\cos 2x \sin(450^\circ - x)}{\cos(x - 540^\circ) \cdot \cos(450^\circ - x) \cdot \cos x} = \frac{\cos 2x \cdot \cos x}{-\cos x \sin x \cos x}$$

$$\sin(450^\circ - x) = \sin 450^\circ \cos x - \cos 450^\circ \sin x = \cos x$$

$$\cos(450^\circ - x) = \cos 450^\circ \cos x + \sin 450^\circ \sin x = \sin x$$

$$\cos(x - 540^\circ) = \cos x \cos 540^\circ + \sin x \sin 540^\circ = -\cos x$$

$$\frac{-\cos 2x}{\sin x \cos x} = \frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} = \underline{\underline{-2 \cot 2x}}$$

$$6.) \sin(15^\circ - x) = \cos(2x + 30^\circ) = \sin(90^\circ \pm (2x + 30^\circ) + n \cdot 360^\circ)$$

$$\oplus \rightarrow 15^\circ - x = 90^\circ + 2x + 30^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$3x = -105^\circ - n \cdot 360^\circ \rightarrow x = -35^\circ - n \cdot 120^\circ$$

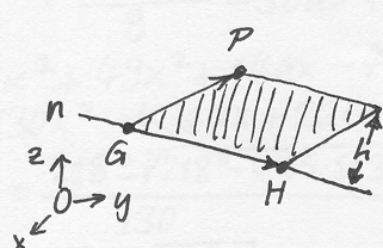
$$n = -1 \rightarrow x_1 = -35^\circ + 120^\circ = 85^\circ$$

$$n = -2 \rightarrow x_2 = -35^\circ + 240^\circ = 205^\circ$$

$$n = -3 \rightarrow x_3 = -35^\circ + 360^\circ = 325^\circ$$

$$\ominus \rightarrow 15^\circ - x = 90^\circ - 2x - 30^\circ + n \cdot 360^\circ \rightarrow x_4 = 45^\circ$$

$$x \in \{45^\circ, 85^\circ, 205^\circ, 325^\circ\}$$

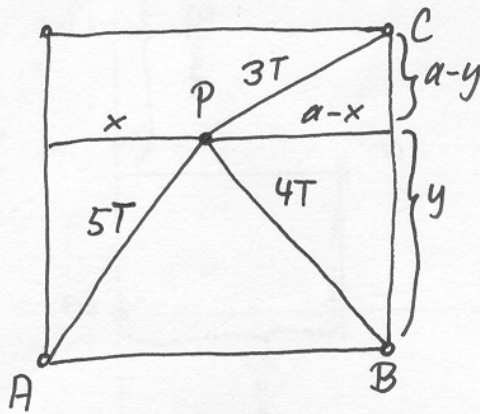
$$7.)$$


$$h = \frac{|\vec{GH} \times \vec{GP}|}{|\vec{GH}|}, \quad |\vec{GH}| = \sqrt{24^2 + 16^2 + 16^2} = \sqrt{1088}$$

$$\vec{GH} \times \vec{GP} = \begin{pmatrix} 24 \\ -16 \\ -16 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |-16 \cdot -3| \\ -|24 \cdot 7| \\ |24 \cdot 7| \\ |-16 \cdot -11| \\ -|24 \cdot 7| \\ |-16 \cdot -3| \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 128 \\ 152 \\ 40 \end{pmatrix} \rightarrow h = \frac{\sqrt{128^2 + 152^2 + 40^2}}{\sqrt{1088}} = \underline{\underline{6.145}}$$

8.)



$$\frac{(a-x)^2 + (a-y)^2}{x^2 + y^2} = \frac{3^2}{5^2} \quad (1)$$

$$\frac{(a-x)^2 + y^2}{x^2 + y^2} = \frac{4^2}{5^2} \quad (2)$$

$$(1) \quad 50a^2 - 50ax + 25x^2 - 50ay + 25y^2 = 9x^2 + 9y^2$$

$$(2) \quad 25a^2 - 50ax + 25x^2 + 25y^2 = 16x^2 + 16y^2$$

$$(1) \quad 16x^2 + 16y^2 - 50ax - 50ay + 50a^2 = 0 \quad | \cdot 9$$

$$(2) \quad 9x^2 + 9y^2 - 50ax + 25a^2 = 0 \quad | \cdot 16$$

$$(1) \quad 144x^2 + 144y^2 - 450ax - 450ay + 450a^2 = 0$$

$$(2) \quad 144x^2 + 144y^2 - 800ax + 400a^2 = 0$$

$$350ax - 450ay + 50a^2 = 0$$

$$7x - 9y + a = 0 \rightarrow 9y = 7x + a$$

$$\rightarrow 9x^2 + \frac{(7x+a)^2}{9} - 50ax + 25a^2 = 0$$

$$81x^2 + 49x^2 + 14ax - 450ax + 226a^2 = 0$$

$$130x^2 - 436ax + 226a^2 = 0 \rightarrow 65x^2 - 218ax + 113a^2 = 0$$

$$x = \frac{218 \pm \sqrt{218^2 - 4 \cdot 65 \cdot 113}}{130} a = \frac{109 \pm \sqrt{109^2 - 65 \cdot 113}}{65} a$$

$$= \frac{109 \pm \sqrt{4536}}{65} a$$

$$\text{Weil } x < a \text{ gilt } x = 0.64077a$$

$$y = \frac{7x+a}{9} = 0.60949a$$

Probe:

$$\frac{1}{9} \overline{PC}^2 = \frac{1}{9} [(a-x)^2 + (a-y)^2] = \frac{1}{9} [(0.3592a)^2 + (0.3905a)^2] = 0.03128a^2$$

$$\frac{1}{16} \overline{PB}^2 = \frac{1}{16} [(a-x)^2 + y^2] = \frac{1}{16} [(0.3592a)^2 + (0.60949a)^2] = 0.03128a^2$$

$$\frac{1}{25} \overline{PA}^2 = \frac{1}{25} [x^2 + y^2] = \frac{1}{25} [(0.64077a)^2 + (0.60949a)^2] = 0.03128a^2$$