

Schriftliche Aufnahmeprüfungen **Frühling 2004****MATHEMATIK** (deutsch)

Die Resultate müssen den **vollständigen Lösungsweg** und **alle Zwischenresultate** enthalten.  
(*Beschluss der Aufnahmeprüfungskommission vom 15.9.2000*)

1. Von einem Dreieck  $ABC$  kennt man die Koordinaten der Eckpunkte  $A(6/-3)$  und  $B(-\frac{3}{4}/6)$  sowie die Gleichung des Inkreises  $k : x^2 + y^2 = 9$ .
  - a) Zeige, dass der Kreis  $k$  die Gerade  $g_{AB}$  berührt.
  - b) Bestimme die Koordinaten der Ecke  $C$ .

2. Gegeben sind die Folgen

$$a_n = \frac{n+1}{2^n}, \quad s_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

- a) Berechne die Werte der Folgenglieder  $s_1, s_2, s_3, s_4$ .
- b) Für  $s_n$  existiert die explizite Darstellung

$$s_n = p - \frac{n+q}{2^n}.$$

Bestimme  $p$  und  $q$  und beweise die Allgemeingültigkeit der Darstellung mit vollständiger Induktion.

3. Ein Kreiskegel mit Grundkreisradius  $r = 12$  und Höhe  $h = 16$  wird zentrisch durchbohrt (Bohrachse: Spitze-Grundkreismittelpunkt).
  - a) Drücke die Gesamtoberfläche des gelochten Körpers durch den Bohrradius  $x$  aus.
  - b) Welches Volumen hat der entstehende Körper, wenn der Bohrradius so gewählt wurde, dass die Gesamtoberfläche des gelochten Körpers maximal ist?

4. Gegeben sind die beiden Funktionen

$$f(x) = \sqrt{2 \sin(x)}, \quad g(x) = \sqrt{1 - \cos(x)}.$$

- a) Skizziere die Graphen im Bereich  $D = [0, \pi]$  mit 2 cm Einheit.
- b) Die Graphen der Funktionen besitzen im Bereich  $D$  neben dem Ursprung einen weiteren Schnittpunkt  $S$ . Berechne dessen exakte  $x$ -Koordinate  $x_S$ .
- c) Die beiden Kurven begrenzen für  $0 \leq x \leq x_S$  ein Flächenstück, welches man um die  $x$ -Achse rotieren lässt. Wie gross wird das Volumen des entstehenden Körpers (auf 2 Nachkommastellen)?