ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo

Rektorat

Schriftliche Aufnahmeprüfungen **Herbst 2005**

MATHEMATIK (deutsch)

Die Resultate müssen den **vollständigen Lösungsweg** und **alle Zwischenresultate** enthalten. (*Beschluss der Aufnahmeprüfungskommission vom 15.9.2000*)

1. Von einer Hohlkugel (Aussenradius $r = 3$, Dicke $d = 1$) wird ein Segment der Höhe h abgeschnitten.

   a) Berechnen Sie das Volumen V des abgeschnittenen Körpers (in Abhängigkeit von h) für $0 \leq h \leq r$. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $0 \leq h \leq d$ und $d \leq h \leq r$.

   b) Zeigen Sie, dass V als Funktion von h an der Stelle $h = d$ differenzierbar ist und zeichnen Sie den Graphen von V für $0 \leq h \leq r$.

   Hinweis: Formel für das Segmentvolumen einer Kugel (h Segmenthöhe, r Kugelradius):
   $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$.

2. a) Bestimmen Sie in einem Dreieck mit den Seiten $a = 8$, $b = 9$, $c = 5$ den Wert
   $P = \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma$.

   b) In einem gleichschenkligen Dreieck sei $P = \frac{1}{8}$. Beweisen Sie, dass das Dreieck gleichseitig sein muss.

3. Die Punkte $A(0/0/0)$, $B(1/2/11)$, $C(10/-1/5)$ und die Ebene $\mathbb{E}$: $x + 4y + 20z + 12 = 0$ sind gegeben.

   a) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene ABC sowie eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden s dieser Ebene mit der Ebene $\mathbb{E}$.

   b) Ein gerades Prisma $ABCDEF$ hat das Dreieck ABC als Grundfläche, die Ecke D liegt in der Ebene $\mathbb{E}$. Bestimmen Sie die Koordinaten der Ecken D, E und F.

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln x - 1}}{x}$.

   a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f und zeichnen Sie mit Hilfe einer Wertetabelle den Graphen von f. Einheit auf der x-Achse 1 cm, auf der y-Achse 10 cm.

   b) Berechnen Sie mittels einer geeigneten Substitution das Integral $\int_e^{e^2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

   c) Wenn der Graph von f um die x-Achse rotiert, entsteht ein nach rechts unbegrenzter Rotationskörper. Berechnen Sie (mit Hilfe einer partiellen Integration) dessen Volumen.