Musterprüfung für die Promotionsprüfung

Teil A: Kurzaufgaben

Aufgabe A.1: (6 Punkte)

Bestimme den Parameter a in der Funktion $y(x) = ax^2 – 5x$ so, dass der Graph der Funktion an der Stelle $x = 2$ die Steigung 7 hat.

Aufgabe A.2: (6 Punkte)

An welcher Stelle $(x = ?)$ hat die Normalparabel $p: y = x^2$ die gleiche Steigung wie die Gerade g, wenn $g: y = 5 – 8x$?

Aufgabe A.3: (6 Punkte)

An welcher Stelle haben die Graphen von k_1: $y = 2x^2$ und k_2: $y = 9x - x^2$ die gleiche Steigung?

Aufgabe A.4: (6 Punkte)

Dort wo die Parabel p: $y = ax^2 + (a - 5)x - 7$ die y-Achse schneidet, hat sie eine Steigung von 1. Wie gross ist a?

Aufgabe A.5: (6 Punkte)

Wie gross ist die Steigung der Wendetangenten von k: $y = x^3 - 6x^2 + 7$?

Aufgabe A.6: (6 Punkte)

Bestimme Nullstellen, Pole und schräge Asymptote der gebrochen rationalen Funktion $y(x) = \frac{x^3 - 16x}{x^2 - x - 6}$.

Aufgabe A.7: (6 Punkte)

Bestimme absolute und relative Extrema der Funktion f: $y = x^3 - 3x + 3$ im Definitionsbereich $D_f = [-3,4]$.

Aufgabe A.8: (6 Punkte)

Zwei Vektoren sind gegeben wie folgt: $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ -8 \end{pmatrix}$. Bestimme den Betrag von **a** und **b**, sowie den von **a** und **b** eingeschlossenen Winkel φ.

Aufgabe A.9: (6 Punkte)

Drei Vektoren sind gegeben wie folgt: $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$. Der Vektor **c** soll als eine Linearkombination von **a** und **b** dargestellt werden wie folgt: $\mathbf{c} = t \cdot \mathbf{a} + u \cdot \mathbf{b}$. Bestimme t und u.

Aufgabe A.10: (6 Punkte)

Bestimme positive Werte für a, wenn $\int_{a}^{a+3} x^2 \, dx = 2109$.

Aufgabe A.11: (6 Punkte)

Die Gerade g berührt die Normalparabel p: $y = x^2$ an der Stelle $x = 2$. Bestimme den Flächeninhalt der von der Parabel p, der Geraden g und der positiven x-Achse eingeschlossenen Fläche.

Aufgabe A.12: (6 Punkte)

Von einem allgemeinen Dreieck mit Eckpunkten A, B und C kann man einen Eckpunkt $A\binom{1}{-2}$, den Mittelpunkt $M_c\binom{4}{-1}$ der Seite c (Strecke AB), sowie $S\binom{3}{2}$, den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden. Bestimme die fehlenden Eckpunkte B und C.

Aufgabe A.13: (6 Punkte)

Ein Kreis mit Mittelpunkt $M\binom{-2}{13}$ berührt die Gerade g im Punkt $B\binom{6}{-2}$. Bestimme den Kreisradius, sowie eine Funktionsgleichung für g.

Aufgabe B.1: (12 Punkte)

Eine ganzrationale Funktion dritten Grades geht durch den Koordinatenursprung und hat einen Terrassenpunkt $P\binom{2}{8}$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Die Parabel $p: y = ax^2 - cx$ geht durch den Punkt $P\binom{1}{-2}$ und schneidet die Gerade $g: y = ax$ im Koordinatenursprung und an der Stelle $x = 3$. Bestimme die Parameter a und c.

Von einer Parabel p kennt man den Scheitelpunkt S und eine Nullstelle wie folgt: $S\begin{pmatrix} 3 \\ -16 \end{pmatrix}$ und $x_1 = -1$. Bestimme die Funktionsgleichung der Parabel.

Eine ganzrationale Funktion dritten Grades geht durch den Koordinatenursprung und hat einen Wendepunkt $W\binom{2}{2}$. Die Wendetangente schneidet die y-Achse auf der Höhe $y = -2$. Bestimme die Funktionsgleichung.

Eine ganzrationale Funktion dritten Grades hat einen Wendepunkt im Koordinatenursprung und berührt die Gerade $g: y = 2x - 2$ an der Stelle $x = 1$. Bestimme die Funktionsgleichung.

Aufgabe B.6: (12 Punkte)

Die horizontale Gerade g berührt den Graphen der ganzrationalen Funktion dritten Grades wie folgt: k: $y = x^3 - 11x^2 + 24x$ im Tiefpunkt. Berechne den Flächeninhalt der von g und k eingeschlossenen Fläche.

Musterlösungen:

A.1. $a = 3$

A.2. $x = -4$

A.3. $x = 3/2$

A.4. $y'(x) = 2ax + a - 5$, $y'(0) = a - 5 = 1 \rightarrow \underline{a = 6}$

A.5. $y''(x) = 6(x - 2) = 0 \rightarrow x_w = 2 \rightarrow y'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 = \underline{-12}$

A.6. Nullstellen: $x_1 = -4$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 4$
Pole: 1. Pol: $x = -2$
2. Pol: $x = 3$
Schräge Asymptote: a: $y = x + 1$

A.7. $y(-3) = -27 - 3 \cdot (-3) + 3 = -15$, $y(2) = 8 - 3 \cdot 2 + 3 = 5$, $y'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow$ $x = \pm 1 \rightarrow H\binom{-1}{5}$, $T\binom{1}{1}$. Es handelt sich um relative Extrema. Absolute Extrema am Rande des Definitionsbereichs wie folgt: Abs. Maximum: $E_1\binom{4}{55}$, abs. Minimum $E_2\binom{-3}{-15}$.

A.8. $|\mathbf{a}| = 13$, $|\mathbf{b}| = 17$, $\varphi = |\arctan(5/12) - \arctan(-8/15)| = 50.69°$

A.9. $-2 = t + 2u$ und $8 = -2t - 5u \rightarrow t = 6$ und $u = -4$

A.10. $[(a + 3)^3 - a^3]/3 = 2109 \rightarrow 6[a^2 + 3a + 3] = 2109 \rightarrow a^2 + 3a - 700 = 0 \rightarrow$
$a = 25$ (weitere Lösung wäre $a = -28 < 0$).

A.11. g: $y = 4x - 4 \rightarrow A = \int_0^2 x^2\,dx - 1 \cdot 4/2 = 2/3$

A.12. $B\binom{7}{0}$ und $C\binom{1}{8}$

A.13. $r = 17$, g: $y = (8/15)x - 26/5$

B.1. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, wobei $d = 0$ weil $O\binom{0}{0} \in$ Graph. $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, $y'' = 2(3ax + b)$, $y(2) = 8 \rightarrow 4a + 2b + c = 4$, $y'(2) = 12a + 4b + c = 0$, $y''(2) = 12a + 2b = 0$. Man erhält $a = 1$, $b = -6$ und $c = 12 \rightarrow y = x^3 - 6x^2 + 12x$

B.2. $p \cap g$: $ax^2 - cx = ax \rightarrow x(ax - a - c) = 0 \rightarrow 3a - a - c = 2a - c = 0 \rightarrow c = 2a$. $P\binom{1}{-2} \in p$: $-2 = a \cdot 1^2 - c \cdot 1 = a - 2a = -a \rightarrow a = 2$, $c = 2a = 2 \cdot 2 = 4$

B.3. p: $y = ax^2 + bx + c \rightarrow$ p: $y' = 2ax + b \rightarrow 2a \cdot 3 + b = 6a + b = 0 \rightarrow b = -6a$.
Nullstelle $a \cdot (-1)^2 + (-6) \cdot (-1)a + c = 7a + c = 0 \rightarrow c = -7a$
$S\binom{3}{-16} \in p$: $-16 = 9a - 6a \cdot 3 - 7a = -16a \rightarrow a = 1$, $b = -6a = -6$ und

$c = -7a = -7 \;\rightarrow\; p\colon y = x^2 - 6x - 7$

B.4. $y = ax^3 + bx^2 + cx$, $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, $y'' = 6ax + 2b$, $y''(2) = 2(6a + b) \;\rightarrow$
$b = -6a$, $y'(2) = c - 12a = 2$, $y(2) = 2c - 16a = 2 \;\rightarrow\; \underline{y = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x}$

B.5. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, wobei $d = 0$ weil $O\binom{0}{0} \in$ Graph; $y' = 3ax^2 + 2bx + c$,
$y'' = 2(3ax + b)$, $y''(0) = 0 \;\rightarrow\; b = 0$, $y(1) = a + c = 0 \;\rightarrow\; c = -a$, $y'(1) = 3a + c = 2a = 2 \;\rightarrow\; a = 1$ und $c = -1 \;\rightarrow\; y = x^3 - x$

B.6. $y' = 3x^2 - 22x + 24 = (3x - 4) \cdot (x - 6) = 0 \;\rightarrow\; T\binom{6}{-36} \;\rightarrow\; g\colon y = -36 \;\rightarrow\; g \cap$
$k\colon x^3 - 11x^2 + 24x + 36 = (x - 6)^2 \cdot (x + 1) \;\rightarrow\; \int_{-1}^{6} (x^3 - 11x^2 + 24x + 36)\,dx =$
$2401/12 = 200.083$