

Differentialgleichungen

© 1996 Peter Senn, Ph.D.

Differentialgleichungen erster Ordnung

Aufgabe M-DG-1: Bestimme die Lösung von $x \frac{dy}{dx} + (1-x)y = xe^x$ für welche $y(1) = 0$.

Aufgabe M-DG-2: Bestimme die Lösung von $\frac{dy}{dx} = 2xy$ für welche $y(0) = 2$.

Aufgabe M-DG-3: Bestimme die Lösung von $(1-y^2) dx + (1-x^2) dy = 0$, wenn $y(2) = 4$.

Aufgabe M-DG-4: Bestimme die Lösung von $x \frac{dy}{dx} - y + x = 0$ für welche $y(1) = 2$.

Aufgabe M-DG-5: Bestimme die Lösung von $x^2 \frac{dy}{dx} + (1-x)y = x^2 e^{1/x}$ für welche $y(1) = 2e$.

Aufgabe M-DG-6: Bestimme die Lösung von $\frac{dy}{dx} - 2(\sin x \cdot \cos x)y = e^{-\cos^2 x}$ für welche $y(\pi) = 0$.

Aufgabe M-DG-7: Bestimme die Lösung von $x \frac{dy}{dx} - (x+1)y = x^2 e^x \cos x$ für welche $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Aufgabe M-DG-8: Löse die (exakte) DG $\left(x \sin(xy) - \frac{y^2}{2x}\right) dx + (y \sin(xy) - y \ln x) dy = 0$.

Aufgabe M-DG-9: Bestimme die Lösung der (exakten) DG $(3x^2 + 2y) dx + (2x - 3) dy = 0$ für welche $y(2) = 0$.

Aufgabe M-DG-10: Bestimme die Lösung der (exakten) DG $(e^y \sin x + 1) dx - (e^y \cos x) dy = 0$ für welche $y(0) = \ln 2$.

Aufgabe M-DG-11: Bestimme die Lösung der (exakten) DG $\left(y - \frac{1}{x}\right) dx + x dy = 0$ für welche $y(1) = 1$.

Aufgabe M-DG-12: Bestimme die Lösung der (exakten) DG $[2xy - \ln(xy)] dx + [x^2 - (x/y)] dy = 0$ für welche $y(1) = 1$.

Aufgabe M-DG-13: Bestimme die Lösung von $(\sqrt{x} \ln y) \frac{dy}{dx} - \sqrt[5]{x} = 0$.

Aufgabe M-DG-14: Bestimme die Lösung von $e^{y/y} - y^2 = 0$.

Aufgabe M-DG-15: Bestimme die Lösung von $\sin(y' y) = x$.

Aufgabe M-DG-16: Bestimme die Lösungen von

a) $(2xy^3 + y) dx + (3x^2y^2 + x - 2) dy = 0$.

b) $(3x^2y - y^3) dx - (3xy^2 - x^3) dy = 0$.

c) $(ye^x + e^y) dx + (xe^y + e^x) dy = 0$.

Aufgabe M-DG-17: Bestimme die Lösungen untenstehender Differentialgleichungen.

a) $y' + y = 2xe^{-x} + 7$

b) $y' + 3y = 9x + e^{-2x}$

c) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{\cos x}{x^2}$

Aufgabe M-DG-18: Bestimme die Lösungen untenstehender Differentialgleichungen mit den vorgegebenen Randbedingungen.

a) $y' - y = 2xe^{2x}$ für $y(0) = 1$

b) $y' + 2y = xe^{-2x}$ für $y(1) = 0$

c) $y' - 2y = 3x^2 e^{2x}$ für $y(1) = 5$

Aufgabe M-DG-19: Bestimme diejenige Lösung der DG $y' = -4x/y$ für welche $y(0) = 4$.

Aufgabe M-DG-20: Bestimme diejenige Lösung der DG $y' = \frac{4xy}{x^2 + 1}$ für welche $y(1) = 8$.

Aufgabe M-DG-21: Bestimme die Lösungen der exakten Differentialgleichungen

a) $(2xy^2 + 2y) dx + (2x^2y + 2x) dy = 0$.

b) $\left(\frac{y}{x} + 6x\right) dx + (\ln x - 2) dy = 0$.

Aufgabe M-DG-22: Bestimme den Wert des Parameters β in untenstehender Differentialgleichung so, dass sie exakt wird und bestimme ihre Lösung für den entsprechenden Wert von β . $(xy^2 + \beta x^2 y) dx + (x + y) x^2 dy = 0$.

Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Aufgabe M-DG-23: Folgende Differentialgleichung beschreibt die Schwingung eines Stabs: $\frac{d^4 y}{dx^4} - k^4 y = 0$, wobei die Grösse k ein Mass für die Steifigkeit des Stabs darstellt. Bestimme die vollständige Lösung.

Aufgabe M-DG-24: Bestimme die Lösungen folgender Differentialgleichungen:

a) $y'' - 2y' + y = e^{2x}$.

g) $\frac{d^3 y}{dx^3} - 8y = e^{2x}$

b) $y'' + 3y' = 9x$.

h) $\frac{d^3 y}{dx^3} + y' = 3x^2 + 2e^x$

c) $y'' - 2y = x e^{-x}$.

i) $y'' - 3y' + 2y = e^x + 10 \sin x$

d) $\frac{d^4 y}{dx^4} - 81y = 27 e^{-3x}$.

j) $y'' - 4y' + 4y = 12 x^2 e^{2x}$

e) $\frac{d^3 y}{dx^3} + y'' = 6x + e^{-x}$.

k) $\frac{d^4 y}{dx^4} + 8y'' + 16y = 9 \sin x$

f) $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}$

Aufgabe M-DG-25: Für welche Werte von r ist $y(x) = Cx^r$ eine Lösung der Differentialgleichung $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$?

Aufgabe M-DG-26: Bestimme die Parameter p und q in untenstehender DG

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - 2 \frac{d^2 y}{dx^2} - p \frac{dy}{dx} + qy = 0$$

so, dass $y_1(x) = Ax e^{2x}$ eine Lösung darstellt. Bestimme alsdann die Lösung der DG.

Aufgabe M-DG-27: Bestimme eine homogene lineare DGen zweiter Ordnung mit folgenden Lösungen:

a) $y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

e) $y_H = C_1 + C_2 e^{2x}$

b) $y_H = C_1 + C_2 x$

f) $y_H = (C_1 + C_2 x) e^{4x}$

c) $y_H = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x$

g) $y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}$

d) $y_H = (C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x) e^{2x}$

Aufgabe M-DG-28: Bestimme homogene lineare DGen dritter Ordnung mit folgenden Lösungen:

a) $y_H = [(C_1 e^x + C_2) e^x + C_3] e^x$

c) $y_H = [C_1 + C_2 x + C_3 x^2] e^{4x}$

b) $y_H = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}$

d) $y_H = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + C_3 e^{2x}$

Aufgabe M-DG-29: Bestimme eine homogene lineare DGen vierter Ordnung mit folgenden Lösungen:

a) $y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{3x}$

b) $y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}$

c) $y_H = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}$

d) $y_H = [C_1 + C_2 x] \sin 3x + [C_3 + C_4 x] \cos 3x$

e) $y_H = [(C_1 + C_2 x) \sin 3x + (C_3 + C_4 x) \cos 3x] e^{2x}$

Aufgabe M-DG-30: Bestimme eine inhomogene DG mit der homogenen Lösung $y_H = [C_1 \sin x + C_2 \cos x] e^{-x}$ und der partikulären Lösung $y_P = e^x$.

Aufgabe M-DG-31: Bestimme in der homogenen DG $y'' - \alpha y' + 6y = 0$ den Parameter α so, dass $y = C_1 e^{3x}$ eine Lösung ist und bestimme die vollständige Lösung.

Aufgabe M-DG-32: Bestimme den Parameter α in der homogenen linearen DG zweiter Ordnung

$$y'' - \alpha y' + 3y = 0$$

so, dass $y_1(x) = A e^x$ eine Lösung ist. Bestimme alsdann diejenige Lösung $y(x)$ der DG für welche $y(0) = 1 + e^2$ und $y(1) = 2e^3$.

Aufgabe M-DG-33: Bestimme diejenigen Lösungen der Differentialgleichung

a) $y'' - 6y' + 9y = 0$ für welche $y(0) = 0$ und $y'(0) = 2$.

b) $y'' + 8y' - 9y = 0$ für welche $y(1) = 0$ und $y'(1) = -1$.

Aufgabe M-DG-34: Bestimme die Lösung der Differentialgleichung $\frac{d^3 y}{dx^3} - 4 \frac{dy}{dx} = x$.

Potenzreihen als Näherung für die Lösungen von linearen Differentialgleichungen

Aufgabe M-DG-35: Die Lösung der homogenen DG $y' - y = 0$ lautet $y = A e^x$. Bestimme eine Potenzreihe fünfter Ordnung als Näherung für die Exponentialfunktion, $y = e^x$, für welche $y(0) = 1$.

Aufgabe M-DG-36: Die Lösung der homogenen DG $y' + y = 0$ lautet $y = A e^{-x}$. Bestimme eine Potenzreihe fünfter Ordnung als Näherung für die Exponentialfunktion mit negativem Argument, $y = e^{-x}$, für welche $y(0) = 1$.

Aufgabe M-DG-37: Die Lösung der homogenen DG $(x + 1) y'' + y' = 0$ lautet $y = C_1 + C_2 \ln(x-1)$. Bestimme eine Potenzreihe fünfter Ordnung als Näherung für den natürlichen Logarithmus, $\ln(x + 1)$, für welchen gilt $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$.

Aufgabe M-DG-38: Die Lösung der homogenen Differentialgleichung $y'' + y = 0$ lautet $y = A \sin x + B \cos x$. Bestimme eine Potenzreihe

a) fünfter Ordnung die Sinusfunktion für welche $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$.

b) sechster Ordnung für die Cosinusfunktion für welche $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$.

Aufgabe M-DG-39: Bestimme eine approximative Lösung der Differentialgleichung

a) $y'' - 2y' + 4y = 6$ mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 2$

b) $y'' + 3y' - 5y = 4x - 9$ mit $y(0) = 5$ und $y'(0) = 4$

c) $y'' + 4y' - 7y = 6x + 1$ mit $y(0) = 7$ und $y'(0) = 10$

als Potenzreihe dritter Ordnung $y(x) \approx a + bx + cx^2 + dx^3$.

Aufgabe M-DG-40: Bestimme eine approximative Lösung der Differentialgleichung

$(x^2 + 2x)y'' + y' - y = 5x$ als eine Potenzreihe vierter Ordnung $y(x) \approx a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ für welche $y(0) = 1$.

Aufgabe M-DG-41: Eine Lösung der DG $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$ ist die *Besselfunktion* erster Ordnung $J_1(x)$. Bestimme eine approximative Lösung in der Form einer Potenzreihe wie folgt: $J_1(x) \approx a_1x + a_3x^3 + a_5x^5$.

Lösungen:

M-DG-1: $y(x) = \frac{x^2 - 1}{2x} e^x$.	M-DG-2: $y(x) = 2e^{x^2}$.
M-DG-3: $y = \frac{2 - 3x}{3 - 2x}$.	M-DG-4: $y(x) = x(\ln x + 2)$.
M-DG-6: $y(x) = (x - \pi) e^{[\sin^2 x - 1]}$.	M-DG-5: $y(x) = x(\ln x + 2) e^{1/x}$.
M-DG-8: ?	M-DG-7: $y(x) = x e^x (\sin x - 1)$.
M-DG-10: $y(x) = \ln\left(\frac{x+1}{\cos x}\right)$.	M-DG-9: $y(x) = \frac{8 - x^3}{2x - 3}$.
M-DG-12: $x[xy - \ln(xy) + 1] = 2$.	M-DG-11: $y(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$.
M-DG-14: $\ln y = C e^{2x}$.	M-DG-13: $y[\ln y - 1] = \frac{10}{7} \sqrt[10]{x^7} + C$.
M-DG-15: $y = \sqrt{2} [x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}] + C$.	
M-DG-16: a) $x^3y^3 + xy - y^2 = c$. (b) $x^3y - xy^3 = c$. (c) $ye^x + xe^y = c$.	
M-DG-17: a) $y = (C + x^2) e^{-x} + 7$. (b) $y = C e^{-3x} + 3x - 1 + e^{-2x}$. (c) $y = \frac{C + \sin x}{x^2}$.	
M-DG-18: a) $y = 3e^x + 2(x - 1)e^{2x}$. (b) $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)e^{-2x}$. (c) $y = (x^3 + \frac{5}{e^2} - 1)e^{2x}$.	
M-DG-19: $y = 2\sqrt{4 - x^2}$.	M-DG-20: $y = 2(x^2 + 1)^2$.
M-DG-21: a) $x^2y^2 + 2xy = C$. (b) $y = \frac{C - 3x^2}{\ln x - 2}$.	
M-DG-22: $\beta = 3; x^2y^2 + 2x^3y = C$.	
M-DG-23: ?	
M-DG-24: a) $y = (C_1 + C_2x)e^x + e^{2x}$. (b) $y = C_1 + C_2e^{-3x} + \frac{3x^2}{2} - x$. (c) $y = C_1e^{\sqrt{2}x} + C_2e^{-\sqrt{2}x} - (x - 2)e^{-x}$. (d) $y = C_1e^{3x} + (C_2 - \frac{x}{4})e^{-3x} + C_3\sin(3x) + C_4\cos(3x)$. (e) $y = C_1 + C_2x + (C_3 + x)e^{-x} + x^3 - 3x^2$. (f) $y = [C_1 + C_2x + (1/2x)]e^{-2x}$. (g) $y = [C_1 + (x/12)]e^{2x} + (C_2\cos(\sqrt{3}x) + C_3\sin(\sqrt{3}x))e^{-x}$. (h) $y = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x - 6x + x^3 + e^x$. (i) $y = (C_1 - x)e^x + C_2e^{2x} + \sin x + 3\cos x$. (j) $y = [C_1 + C_2x + x^4]e^{2x}$. (k) $y = (C_1 + C_2x)\sin 2x + (C_3 + C_4x)\cos 2x + \sin x$.	

M-DG-25: $r_1 = 3$ und $r_2 = 2$.
M-DG-26: $p = 4$; $q = 8$; $y_H = C_1 e^{-2x} + [C_2 + Ax] e^{2x}$.
M-DG-27: a) ? (b) ? (c) ? (d) ? (e) ? (f) ? (g) $y'' - 7y' + 10y = 0$.
M-DG-28: a) ? (b) ? (c) ?
M-DG-29: a) ? (b) ? (c) ? (d) ? (e) $y^{IV} - 8y''' + 42y'' - 104y' + 169y = 0$.
M-DG-30: $y'' + 2y' + 2y = 5e^x$.
M-DG-31: $\alpha = 5$; $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$.
M-DG-32: $\alpha = 4$; $y(x) = (e^2 + e^{2x}) e^x$.
M-DG-33: a) $y(x) = 2x e^{3x}$. (b) $y(x) = \frac{e^{9(1-x)} - e^{x-1}}{10}$.
M-DG-34: $y(x) = C_1 - \frac{x^2}{8} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}$.
M-DG-35: ?
M-DG-36: ?
M-DG-37: ?
M-DG-38: ?
M-DG-39: (a) $y \approx 2x + 5x^2 + 2x^3$; (b) $y \approx 5 + 4x + 2x^2 + 2x^3$; (c) $y \approx 7 + 10x + 5x^2 + 6x^3$.
M-DG-40: $y \approx 1 + x + x^2 - x^3/15 + x^4/84$.
M-DG-41: $J_1(x) \approx x/2 - x^3/16 + x^5/384$.