

# Differentialgleichungen

© 1996 Peter Senn, Ph.D.

## Differentialgleichungen erster Ordnung

**Aufgabe M-DG-1:** Bestimme die Lösung von  $x \frac{dy}{dx} + (1-x)y = xe^x$  für welche  $y(1) = 0$ .

**Aufgabe M-DG-2:** Bestimme die Lösung von  $\frac{dy}{dx} = 2xy$  für welche  $y(0) = 2$ .

**Aufgabe M-DG-3:** Bestimme die Lösung von  $(1-y^2) dx + (1-x^2) dy = 0$ , wenn  $y(2) = 4$ .

**Aufgabe M-DG-4:** Bestimme die Lösung von  $x \frac{dy}{dx} - y + x = 0$  für welche  $y(1) = 2$ .

**Aufgabe M-DG-5:** Bestimme die Lösung von  $x^2 \frac{dy}{dx} + (1-x)y = x^2 e^{1/x}$  für welche  $y(1) = 2e$ .

**Aufgabe M-DG-6:** Bestimme die Lösung von  $\frac{dy}{dx} - 2(\sin x \cdot \cos x) y = e^{-\cos^2 x}$  für welche  $y(\pi) = 0$ .

**Aufgabe M-DG-7:** Bestimme die Lösung von  $x \frac{dy}{dx} - (x+1)y = x^2 e^x \cos x$  für welche  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

**Aufgabe M-DG-8:** Löse die (exakte) DG  $\left(x \sin(xy) - \frac{y^2}{2x}\right) dx + (y \sin(xy) - y \ln x) dy = 0$ .

**Aufgabe M-DG-9:** Bestimme die Lösung der (exakten) DG  $(3x^2 + 2y) dx + (2x - 3) dy = 0$  für welche  $y(2) = 0$ .

**Aufgabe M-DG-10:** Bestimme die Lösung der (exakten) DG  $(e^y \sin x + 1) dx - (e^y \cos x) dy = 0$  für welche  $y(0) = \ln 2$ .

**Aufgabe M-DG-11:** Bestimme die Lösung der (exakten) DG  $\left(y - \frac{1}{x}\right) dx + x dy = 0$  für welche  $y(1) = 1$ .

**Aufgabe M-DG-12:** Bestimme die Lösung der (exakten) DG  $[2xy - \ln(xy)] dx + [x^2 - (x/y)] dy = 0$  für welche  $y(1) = 1$ .

**Aufgabe M-DG-13:** Bestimme die Lösung von  $(\sqrt{x} \ln y) \frac{dy}{dx} - \sqrt[5]{x} = 0$ .

**Aufgabe M-DG-14:** Bestimme die Lösung von  $e^{y/y} - y^2 = 0$ .

**Aufgabe M-DG-15:** Bestimme die Lösung von  $\sin(y' y) = x$ .

**Aufgabe M-DG-16:** Bestimme die Lösungen von

a)  $(2xy^3 + y) dx + (3x^2y^2 + x - 2) dy = 0$ .

b)  $(3x^2y - y^3) dx - (3xy^2 - x^3) dy = 0$ .

c)  $(ye^x + e^y) dx + (xe^y + e^x) dy = 0$ .

**Aufgabe M-DG-17:** Bestimme die Lösungen untenstehender Differentialgleichungen.

a)  $y' + y = 2xe^{-x} + 7$

b)  $y' + 3y = 9x + e^{-2x}$

c)  $y' + \frac{2y}{x} = \frac{\cos x}{x^2}$

**Aufgabe M-DG-18:** Bestimme die Lösungen untenstehender Differentialgleichungen mit den vorgegebenen Randbedingungen.

a)  $y' - y = 2xe^{2x}$  für  $y(0) = 1$

b)  $y' + 2y = xe^{-2x}$  für  $y(1) = 0$

c)  $y' - 2y = 3x^2 e^{2x}$  für  $y(1) = 5$

**Aufgabe M-DG-19:** Bestimme diejenige Lösung der DG  $y' = -4x/y$  für welche  $y(0) = 4$ .

**Aufgabe M-DG-20:** Bestimme diejenige Lösung der DG  $y' = \frac{4xy}{x^2 + 1}$  für welche  $y(1) = 8$ .

**Aufgabe M-DG-21:** Bestimme die Lösungen der exakten Differentialgleichungen

a)  $(2xy^2 + 2y) dx + (2x^2y + 2x) dy = 0$ .

b)  $\left(\frac{y}{x} + 6x\right) dx + (\ln x - 2) dy = 0$ .

**Aufgabe M-DG-22:** Bestimme den Wert des Parameters  $\beta$  in untenstehender Differentialgleichung so, dass sie exakt wird und bestimme ihre Lösung für den entsprechenden Wert von  $\beta$ .  $(xy^2 + \beta x^2 y) dx + (x + y) x^2 dy = 0$ .

## Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

**Aufgabe M-DG-23:** Folgende Differentialgleichung beschreibt die Schwingung eines Stabs:  $\frac{d^4y}{dx^4} - k^4y = 0$ , wobei die Grösse  $k$  ein Mass für die Steifigkeit des Stabs darstellt. Bestimme die vollständige Lösung.

**Aufgabe M-DG-24:** Bestimme die Lösungen folgender Differentialgleichungen:

a)  $y'' - 2y' + y = e^{2x}$ .

g)  $\frac{d^3y}{dx^3} - 8y = e^{2x}$

b)  $y'' + 3y' = 9x$ .

h)  $\frac{d^3y}{dx^3} + y' = 3x^2 + 2e^x$

c)  $y'' - 2y = xe^{-x}$ .

i)  $y'' - 3y' + 2y = e^x + 10 \sin x$

d)  $\frac{d^4y}{dx^4} - 81y = 27e^{-3x}$ .

j)  $y'' - 4y' + 4y = 12x^2 e^{2x}$

e)  $\frac{d^3y}{dx^3} + y'' = 6x + e^{-x}$ .

k)  $\frac{d^4y}{dx^4} + 8y'' + 16y = 9 \sin x$

f)  $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}$

**Aufgabe M-DG-25:** Für welche Werte von  $r$  ist  $y(x) = Cx^r$  eine Lösung der Differentialgleichung  $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$  ?

**Aufgabe M-DG-26:** Bestimme die Parameter  $p$  und  $q$  in untenstehender DG

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - p\frac{dy}{dx} + qy = 0$$

so, dass  $y_1(x) = Ax e^{2x}$  eine Lösung darstellt. Bestimme alsdann die Lösung der DG.

**Aufgabe M-DG-27:** Bestimme eine homogene lineare DGen zweiter Ordnung mit folgenden Lösungen:

a)  $y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

e)  $y_H = C_1 + C_2 e^{2x}$

b)  $y_H = C_1 + C_2 x$

f)  $y_H = (C_1 + C_2 x) e^{4x}$

c)  $y_H = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x$

g)  $y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}$

d)  $y_H = (C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x) e^{2x}$

**Aufgabe M-DG-28:** Bestimme homogene lineare DGen dritter Ordnung mit folgenden Lösungen:

a)  $y_H = [(C_1 e^x + C_2) e^x + C_3] e^x$

c)  $y_H = [C_1 + C_2 x + C_3 x^2] e^{4x}$

b)  $y_H = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}$

d)  $y_H = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + C_3 e^{2x}$

**Aufgabe M-DG-29:** Bestimme eine homogene lineare DGen vierter Ordnung mit folgenden Lösungen:

a)  $y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{3x}$

b)  $y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}$

c)  $y_H = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}$

d)  $y_H = [C_1 + C_2 x] \sin 3x + [C_3 + C_4 x] \cos 3x$

e)  $y_H = [(C_1 + C_2 x) \sin 3x + (C_3 + C_4 x) \cos 3x] e^{2x}$

**Aufgabe M-DG-30:** Bestimme eine inhomogene DG mit der homogenen Lösung  $y_H = [C_1 \sin x + C_2 \cos x] e^{-x}$  und der partikulären Lösung  $y_p = e^x$ .

**Aufgabe M-DG-31:** Bestimme in der homogenen DG  $y'' - \alpha y' + 6y = 0$  den Parameter  $\alpha$  so, dass  $y = C_1 e^{3x}$  eine Lösung ist und bestimme die vollständige Lösung.

**Aufgabe M-DG-32:** Bestimme den Parameter  $\alpha$  in der homogenen linearen DG zweiter Ordnung

$$y'' - \alpha y' + 3y = 0$$

so, dass  $y_1(x) = A e^x$  eine Lösung ist. Bestimme alsdann diejenige Lösung  $y(x)$  der DG für welche  $y(0) = 1 + e^2$  und  $y(1) = 2e^3$ .

**Aufgabe M-DG-33:** Bestimme diejenigen Lösungen der Differentialgleichung

a)  $y'' - 6y' + 9y = 0$  für welche  $y(0) = 0$  und  $y'(0) = 2$ .

b)  $y'' + 8y' - 9y = 0$  für welche  $y(1) = 0$  und  $y'(1) = -1$ .

**Aufgabe M-DG-34:** Bestimme die Lösung der Differentialgleichung  $\frac{d^3y}{dx^3} - 4 \frac{dy}{dx} = x$ .

## Potenzreihen als Näherung für die Lösungen von linearen Differentialgleichungen

**Aufgabe M-DG-35:** Die Lösung der homogenen DG  $y' - y = 0$  lautet  $y = A e^x$ . Bestimme eine Potenzreihe fünfter Ordnung als Näherung für die Exponentialfunktion,  $y = e^x$ , für welche  $y(0) = 1$ .

**Aufgabe M-DG-36:** Die Lösung der homogenen DG  $y' + y = 0$  lautet  $y = A e^{-x}$ . Bestimme eine Potenzreihe fünfter Ordnung als Näherung für die Exponentialfunktion mit negativem Argument,  $y = e^{-x}$ , für welche  $y(0) = 1$ .

**Aufgabe M-DG-37:** Die Lösung der homogenen DG  $(x + 1) y'' + y' = 0$  lautet  $y = C_1 + C_2 \ln(x-1)$ . Bestimme eine Potenzreihe fünfter Ordnung als Näherung für den natürlichen Logarithmus,  $\ln(x + 1)$ , für welchen gilt  $y(0) = 0$  und  $y'(0) = 1$ .

**Aufgabe M-DG-38:** Die Lösung der homogenen Differentialgleichung  $y'' + y = 0$  lautet  $y = A \sin x + B \cos x$ . Bestimme eine Potenzreihe

a) fünfter Ordnung die Sinusfunktion für welche  $y(0) = 0$  und  $y'(0) = 1$ .

b) sechster Ordnung für die Cosinusfunktion für welche  $y(0) = 1$  und  $y'(0) = 0$ .

**Aufgabe M-DG-39:** Bestimme eine approximative Lösung der Differentialgleichung

a)  $y'' - 2y' + 4y = 6$  mit  $y(0) = 0$  und  $y'(0) = 2$

b)  $y'' + 3y' - 5y = 4x - 9$  mit  $y(0) = 5$  und  $y'(0) = 4$

c)  $y'' + 4y' - 7y = 6x + 1$  mit  $y(0) = 7$  und  $y'(0) = 10$

als Potenzreihe dritter Ordnung  $y(x) \approx a + bx + cx^2 + dx^3$ .

**Aufgabe M-DG-40:** Bestimme eine approximative Lösung der Differentialgleichung

$(x^2 + 2x)y'' + y' - y = 5x$  als eine Potenzreihe vierter Ordnung  $y(x) \approx a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$  für welche  $y(0) = 1$ .

**Aufgabe M-DG-41:** Eine Lösung der DG  $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$  ist die *Besselfunktion* erster Ordnung  $J_1(x)$ . Bestimme eine approximative Lösung in der Form einer Potenzreihe wie folgt:  $J_1(x) \approx a_1x + a_3x^3 + a_5x^5$ .

### Lösungen:

<b>M-DG-1:</b> $y(x) = \frac{x^2 - 1}{2x} e^x$ .	<b>M-DG-2:</b> $y(x) = 2e^{x^2}$ .
<b>M-DG-3:</b> $y = \frac{2 - 3x}{3 - 2x}$ .	<b>M-DG-4:</b> $y(x) = x(\ln x + 2)$ .
<b>M-DG-6:</b> $y(x) = (x - \pi) e^{[\sin^2 x - 1]}$ .	<b>M-DG-5:</b> $y(x) = x(\ln x + 2) e^{1/x}$ .
<b>M-DG-8:</b> ?	<b>M-DG-7:</b> $y(x) = x e^x (\sin x - 1)$ .
<b>M-DG-10:</b> $y(x) = \ln\left(\frac{x+1}{\cos x}\right)$ .	<b>M-DG-9:</b> $y(x) = \frac{8 - x^3}{2x - 3}$ .
<b>M-DG-12:</b> $x[xy - \ln(xy) + 1] = 2$ .	<b>M-DG-11:</b> $y(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$ .
<b>M-DG-14:</b> $\ln y = C e^{2x}$ .	<b>M-DG-13:</b> $y[\ln y - 1] = \frac{10}{7} \sqrt[10]{x^7} + C$ .
<b>M-DG-15:</b> $y = \sqrt{2} [x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}] + C$ .	
<b>M-DG-16:</b> a) $x^3y^3 + xy - y^2 = c$ . (b) $x^3y - xy^3 = c$ . (c) $ye^x + xe^y = c$ .	
<b>M-DG-17:</b> a) $y = (C + x^2) e^{-x} + 7$ . (b) $y = C e^{-3x} + 3x - 1 + e^{-2x}$ . (c) $y = \frac{C + \sin x}{x^2}$ .	
<b>M-DG-18:</b> a) $y = 3e^x + 2(x - 1)e^{2x}$ . (b) $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)e^{-2x}$ . (c) $y = (x^3 + \frac{5}{e^2} - 1)e^{2x}$ .	
<b>M-DG-19:</b> $y = 2\sqrt{4 - x^2}$ .	<b>M-DG-20:</b> $y = 2(x^2 + 1)^2$ .
<b>M-DG-21:</b> a) $x^2y^2 + 2xy = C$ . (b) $y = \frac{C - 3x^2}{\ln x - 2}$ .	
<b>M-DG-22:</b> $\beta = 3; x^2y^2 + 2x^3y = C$ .	
<b>M-DG-23:</b> ?	
<b>M-DG-24:</b> a) $y = (C_1 + C_2x)e^x + e^{2x}$ . (b) $y = C_1 + C_2e^{-3x} + \frac{3x^2}{2} - x$ . (c) $y = C_1e^{\sqrt{2}x} + C_2e^{-\sqrt{2}x} - (x - 2)e^{-x}$ . (d) $y = C_1e^{3x} + (C_2 - \frac{x}{4})e^{-3x} + C_3\sin(3x) + C_4\cos(3x)$ . (e) $y = C_1 + C_2x + (C_3 + x)e^{-x} + x^3 - 3x^2$ . (f) $y = [C_1 + C_2x + (1/2x)]e^{-2x}$ . (g) $y = [C_1 + (x/12)]e^{2x} + (C_2\cos(\sqrt{3}x) + C_3\sin(\sqrt{3}x))e^{-x}$ . (h) $y = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x - 6x + x^3 + e^x$ . (i) $y = (C_1 - x)e^x + C_2e^{2x} + \sin x + 3\cos x$ . (j) $y = [C_1 + C_2x + x^4]e^{2x}$ . (k) $y = (C_1 + C_2x)\sin 2x + (C_3 + C_4x)\cos 2x + \sin x$ .	

<b>M-DG-25:</b> $r_1 = 3$ und $r_2 = 2$ .
<b>M-DG-26:</b> $p = 4$ ; $q = 8$ ; $y_H = C_1 e^{-2x} + [C_2 + Ax] e^{2x}$ .
<b>M-DG-27:</b> a) ? (b) ? (c) ? (d) ? (e) ? (f) ? (g) $y'' - 7y' + 10y = 0$ .
<b>M-DG-28:</b> a) ? (b) ? (c) ?
<b>M-DG-29:</b> a) ? (b) ? (c) ? (d) ? (e) $y^{IV} - 8y''' + 42y'' - 104y' + 169y = 0$ .
<b>M-DG-30:</b> $y'' + 2y' + 2y = 5e^x$ .
<b>M-DG-31:</b> $\alpha = 5$ ; $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$ .
<b>M-DG-32:</b> $\alpha = 4$ ; $y(x) = (e^2 + e^{2x}) e^x$ .
<b>M-DG-33:</b> a) $y(x) = 2x e^{3x}$ . (b) $y(x) = \frac{e^{9(1-x)} - e^{x-1}}{10}$ .
<b>M-DG-34:</b> $y(x) = C_1 - \frac{x^2}{8} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}$ .
<b>M-DG-35:</b> ?
<b>M-DG-36:</b> ?
<b>M-DG-37:</b> ?
<b>M-DG-38:</b> ?
<b>M-DG-39:</b> (a) $y \approx 2x + 5x^2 + 2x^3$ ; (b) $y \approx 5 + 4x + 2x^2 + 2x^3$ ; (c) $y \approx 7 + 10x + 5x^2 + 6x^3$ .
<b>M-DG-40:</b> $y \approx 1 + x + x^2 - x^3/15 + x^4/84$ .
<b>M-DG-41:</b> $J_1(x) \approx x/2 - x^3/16 + x^5/384$ .