Eine Differentialgleichung der Form

$$p(x, y) + y'q(x, y) = 0$$

heißt **exakte Differentialgleichung**, wenn es eine Funktion $F(x, y)$ gibt, so dass $p(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ und $q(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$.

Bei einer so gegebenen exakten DGL ist die Lösung in impliziter Form sofort klar: $F(x, y) = C$.

Benutzen wir die verallgemeinerte Kettenregel, so gilt $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} y' = 0$; setzen wir hier p und q ein, so ist die DGL erfüllt.

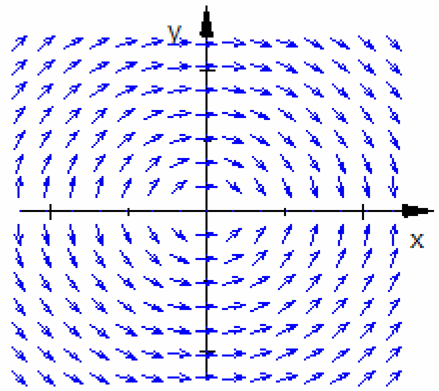
Beispiele

Beispiel 1

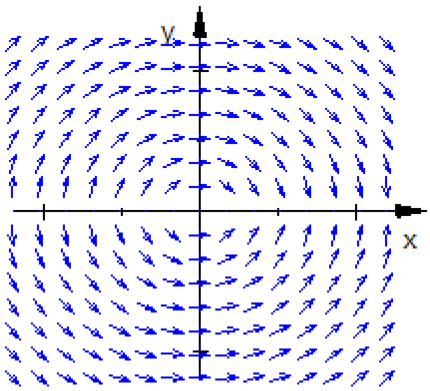
$4x^3 y + (y^2 + x^4)y' = 0$

$F(x,y) = yx^4 + \frac{1}{3}y^3$ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 4x^3 y$ und $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = y^2 + x^4$

Lösung: $yx^4 + \frac{1}{3}y^3 = C$



y'=-x/y



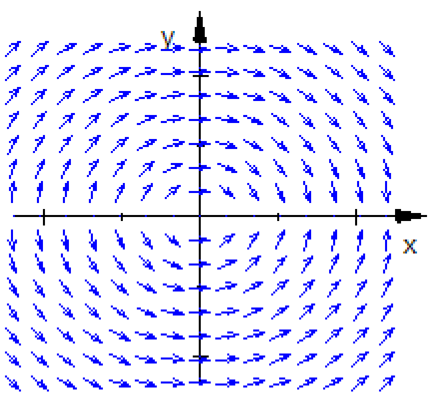
y'=-x/y

Beispiel 2

$y' = -\frac{x}{y}$ (vgl. Beispiel 166V) $x + yy' = 0$

$F(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$

Lösung: $x^2 + y^2 = 2C$



y'=-x/y

Bemerkung

Wissen wir, dass eine DGL exakt ist, so können wir sie folgendermaßen lösen: Wir integrieren zuerst p nach x und ermitteln die verbleibende Konstante $C(y)$ aus der Gleichung $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = q$ (oder umgekehrt). Satz 167V liefert das nötige Kriterium um eine DGL auf Exaktheit zu testen.

Beispiel

$y+\left(x+\frac{2}{y}\right)y'=0$ ist eine *exakte Differentialgleichung*.

Es ist $\frac{\partial F}{\partial x}=y$. Daher ist $F(x, y)=\int y\,\mathrm{d}x = xy + C(y)$

$\frac{\partial F}{\partial y}=x+C'(y)=x+\frac{2}{y}\Rightarrow C'(y)=\frac{2}{y}\Rightarrow C(y) = 2\ln y$.

$F(x, y) = xy + 2\ln y$