Übungen: Erhaltungssätze der Mechanik

1.) In einer Maschine zur Herstellung von Brät rotiert das Messer mit 40U/min. Zur Aufrechterhaltung der Drehung muss ein Elektromotor ein Drehmoment von $1.5 \cdot 10^3$ Nm aufbringen. Wie viel Wärme wird pro Minute im Brät erzeugt?

2.) Wie stark kann ein $1.3 \cdot 10^3$ kg schweres Fahrzeug durch einen Antriebsmotor mit 110PS Nutzleistung bei einer Geschwindigkeit von

a) 50km/h

b) 100km/h

höchstens beschleunigt werden?

3.) Eine Kugel der Masse m trifft auf eine ruhende doppelt so schwere Masse. Bestimme aus Erhaltungssätzen Lösungen für die Bewegungszustände der Kugeln nach einem vollkommen elastischen zentralen Stoss. Interpretiere die Ergebnisse.

4.) Eine Kugel streift eine zweite ruhende gleich schwere Kugel. Die Geschwindigkeit der Kugel vor dem Stoss sei $\vec{v}_1$ und nach dem Stoss seien die Geschwindigkeit der Kugeln $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$. Zeige, dass $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ senkrecht aufeinander stehen, wenn der Stoss vollkommen elastisch ist.

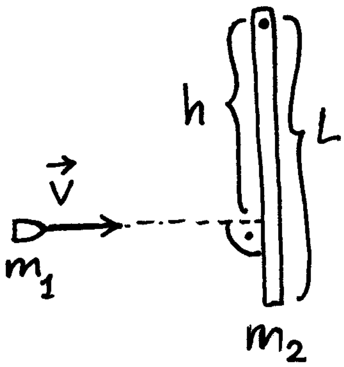
5.) Eine Kugel der Masse m trifft auf eine zweite ruhende gleich schwere Kugel. Bei einem zentralen unelastischen Stoss gilt

$$u_1 + u_2 = v_1 \quad \text{(aus Impulserhaltung!)}$$

Die Bewegungsenergie nach dem Stoss ist $E_{kin}' = \frac{1}{2}m(u_1^2 + u_2^2)$. Zeige, dass die Bewegungsenergie nach einem vollkommen unelastischen Stoss ($u_1 = u_2 = 1/2\, v_1$) am kleinsten ist.

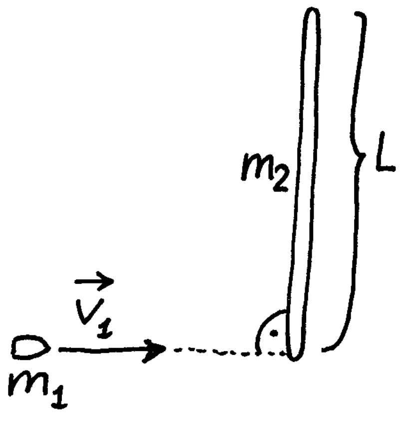
6.) Eine Eiskunstläuferin hat mit ausgebreiteten Armen ein Massenträgheitsmoment von $2.3\,kg \cdot m^2$. Bei einer Pirouette rotiert sie anfangs mit ausgebreiteten Armen mit 30 U/min. Durch Hochheben der Arme verringert sie ihr Massenträgheitsmoment auf $0.8\,kg \cdot m^2$. Wie schnell rotiert sie dann?

7.) Eine 8.0 g schwere Pistolenkugel trifft mit einer Geschwindigkeit v von 500 m/s auf einen 80 cm langen, 1.1 kg schweren Holzstab. Der Holzstab ist an einem Ende mit einem Nagel aufgehängt



und die Kugel trifft in einer Höhe h unterhalb der Aufhängung senkrecht auf den Holzstab. Für kleine Werte von h wird der Holzstab bloss in Schwingung versetzt. Wie gross muss h mindestens sein, damit der Stab sich dreht, wenn die Kugel im Stab stecken bleibt? Die Veränderung des Massenträgheitsmoments durch das Eindringen der Kugel soll vernachlässigt werden. Es sei $g = 10\,m/s^2$.

8.) Eine 8.0 g schwere Pistolenkugel trifft mit einer Geschwindigkeit von 500 m/s auf einen 1.2 m langen, 400 g schweren Holzstab. Die Kugel trifft am einem Stabende senkrecht auf den Holzstab

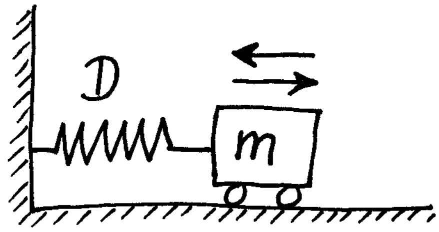


und bleibt in ihm stecken. Die Veränderung des Massenträgheitsmoments des Holzstabs beim Eindringen der Kugel soll vernachlässigt werden. Bestimme den Bewegungszustand des Stabs nach dem Stoss.

9.) Beim α-Zerfall von U-238 wurde für das α-Teilchen eine Bewegungsenergie von 4.195 MeV gemessen. Wie gross ist die Energie des Zerfalls, wenn der Tochterkern 58.5 Mal so schwer ist wie das α-Teilchen?

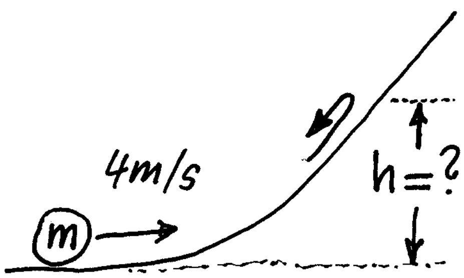
10.) Eine Turbinenschaufel soll als ein 12cm langer, 85g schwerer Stab betrachtet werden, dessen Schwerpunkt 34cm vom Drehpunkt entfernt mit 4800 U/min rotiert. Durch Materialermüdung bricht die Schaufel ab und schiesst durch die Luft. Beschreibe ihren Bewegungszustand nach dem Abbrechen.

11.) Ein Federpendel mit $m = 4kg$ und $D = 400$ N/m vibriert mit einer Amplitude von 5cm.



a) Wie viel Energie steckt in der Schwingung?
b) Wie gross ist die Höchstgeschwindigkeit der Masse?

12.) Ein rollender Ball nähert sich auf einer Minigolfbahn mit $v = 4m/s$ einer Rampe. Bis auf welche Höhe h steigt der Ball auf der Rampe höchstens? Es sei $g = 10 m/s^2$.



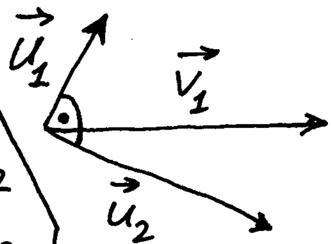
Musterlösungen

1.) $P = M\omega = (1500\cdot 40\cdot 2\pi/60)\,W = 6.28\,kW$
$\rightarrow \Delta Q = P\cdot\Delta t = 6283\cdot 60\,J = \underline{\underline{0.38\,MJ}}$

2.) $P = F\cdot v = mav \rightarrow a = P/(mv)$
a) $a = (110/(1300\cdot 50/3.6))\cdot 735.5\,m/s^2 = \underline{\underline{4.5\,m/s^2}}$
b) $a = (110/(1300\cdot 100/3.6))\cdot 735.5\,m/s^2 = \underline{\underline{2.2\,m/s^2}}$

3.) $m v_1 = m u_1 + 2 m u_2 \rightarrow u_1 = v_1 - 2u_2 \leftarrow$ Impuls
$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m[u_1^2 + 2u_2^2] \rightarrow u_1^2 = v_1^2 - 2u_2^2 \leftarrow$ Energie
$\rightarrow (v_1 - 2u_2)^2 = v_1^2 - 2u_2^2 \rightarrow 4 v_1 u_2 = 6 u_2^2 \rightarrow$
$u_{21} = 0$ und $u_{22} = \frac{2}{3} v_1 \rightarrow u_{11} = v_1 - 2u_{21} = v_1$
und $u_{12} = v_1 - 2u_{22} = v_1 - \frac{4}{3} v_1 = -\frac{1}{3} v_1$
Es gibt zwei Lösungen wie folgt:
1. Lösung: $u_1 = v_1$ und $u_2 = v_2 = 0$
Die Massen verharren in ihrem Bewegungszustand. Der Stoss findet nicht statt.
2. Lösung: $u_1 = -v_1/3$ und $u_2 = (2/3) v_1$
Die kleinere Masse bewegt sich nach dem Stoss in Gegenrichtung.

4.) $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{v}_1 \leftarrow$ Impuls
$u_1^2 + u_2^2 = v_1^2 \leftarrow$ Energie
$\rightarrow (\vec{u}_1 + \vec{u}_2)\cdot(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = v_1^2$
$\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1 + 2\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2 + \vec{u}_2\cdot\vec{u}_2 = v_1^2$
$u_1^2 + u_2^2 + 2\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2 = v_1^2$
$2\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2 = 0 \rightarrow \vec{u}_1\cdot\vec{u}_2 = 0 \rightarrow \underline{\underline{\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2}}$



5.) $u_2 = v_1 - u_1 \rightarrow E'_{kin} = \frac{1}{2} m [u_1^2 + u_2^2] = m[u_1^2 - u_1 v_1 + \frac{1}{2} v_1^2] \rightarrow \frac{d}{du_1} E_{kin} = m \cdot \frac{d}{du_1} [u_1^2 - u_1 v_1 + \frac{1}{2} v_1^2] = m(2u_1 - v_1)$
$= 0 \rightarrow u_1 = \frac{1}{2} v_1$ und $u_2 = v_1 - u_1 = \frac{1}{2} v_1 \rightarrow$
E'_{kin} ist am kleinsten, wenn $\underline{\underline{u_1 = u_2 = \frac{1}{2} v_1}}$

6.) Kein Drehmoment $\rightarrow L_1 = L_2 \rightarrow J_1 w_1 = J_2 w_2$
$\rightarrow w_2 = (J_1/J_2) w_1 = (2.3/0.8) \cdot (30 \cdot 2\pi/(60s))$
Die Eiskunstläuferin rotiert mit $\underline{\underline{86\ U/min}}$

7.) Drehimpuls: $m_1 h v = m_2 L^2 w/3$
Energie: $\frac{1}{2} J w^2 = \frac{1}{6} m_2 L^2 w^2 = m_2 g L \rightarrow w = \sqrt{\frac{6g}{L}}$
$\rightarrow h = m_2 L \sqrt{6Lg}/(3 m_1 v) = [1.1 \cdot 0.8 \cdot \sqrt{6 \cdot 0.8 \cdot 10}/(3 \cdot 0.008 \cdot 500)] m = 51 cm$

8.) Linearer Impuls: $m_1 v_1 = m_2 v_2 \rightarrow v_2 = (m_1/m_2) v_1$
$= (8/400) \cdot 500\, m/s = \underline{\underline{10 m/s}}$
Drehimpuls: $m_1 \frac{L}{2} v = \frac{1}{12} m_2 L^2 w \rightarrow w = 6 m_1 v_1/(m_2 L)$
$= [6 \cdot 0.008 \cdot 500/(0.4 \cdot 1.2)] s^{-1} = \underline{\underline{50 s^{-1}}}$
$\approx 477\ U/min$
Der Stab dreht sich um seinen Schwerpunkt mit 477 U/min und der Schwerpunkt bewegt sich mit 10 m/s.

9.) $E_{kin,\alpha} = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2$
$E_{kin,T} = \frac{1}{2} m_T v_T^2$, $m_\alpha v_\alpha = m_T v_T \leftarrow$ Impulserhaltung
$E_{kin,T} = \frac{1}{2m_T} (m_T v_T)^2 = \frac{1}{2m_T} (m_\alpha v_\alpha)^2 = \frac{m_\alpha}{m_T} \cdot \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2$
$= \frac{m_\alpha}{m_T} E_{kin,\alpha} = \frac{4.195 MeV}{58.5} = 0.072 MeV \longrightarrow \underline{\underline{4.267 MeV}}$
$+ 4.195 MeV$

10.) $J_1 = \frac{1}{12} m l^2 + m s^2$, $J_2 = \frac{1}{12} m l^2$

Drehimpuls: $J_1 w_1 = J_2 w_2 + m s v_2$

$$J_1 w_1 = J_2 w_2 + m s^2 w_2 = (J_2 + m s^2) w_2$$

$$= J_1 w_2 \rightarrow w_2 = w_1$$

$v_S = w_2 \cdot s = w_1 \cdot s = 4800 \cdot 2\pi \cdot 0.34m/(60s) = \underline{\underline{171 m/s}}$

Die Schaufel fliegt mit einer Geschwindigkeit von 171 m/s, resp. 615 km/h durch die Luft. Sie rotiert weiterhin mit 4800U/min um ihren Schwerpunkt.

11a) $E = \frac{1}{2} D \hat{y}^2 = \frac{1}{2} \cdot 400 \cdot 0.05^2 J = \underline{\underline{0.5 J}}$

b) $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = 0.5 J \rightarrow v = \sqrt{2 E_{kin} / m} =$
$\sqrt{2 \cdot 0.5 / 4}\, m/s = \underline{\underline{0.5 m/s}}$

12.) $v = w r$, $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_s w^2$, $J_s = \frac{2}{5} m r^2$

$E_{kin} = \frac{7}{10} m v^2 = m g h \rightarrow h = 7 v^2 / (10 g) =$
$(7 \cdot 4^2 / (10 \cdot 10)) m = \underline{\underline{112 cm}}$