Musterprüfung KVM5-1

Themen:
- Potenz- und Wurzelfunktionen (A)
- Exponential- und Logarithmusfunktionen (B)

A.1) Gegeben ist die Wurzelfunktion $y = f(x) = 3\sqrt{x-1}$

a) Skizziere die Funktion.

b) Bestimme die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$.

c) Skizziere die Umkehrfunktion

A.2) Gegeben ist folgende Potenzfunktion: $y = f(x) = \frac{x^3}{4}$

a) Stelle die Potenzfunktion für den Bereich $-3 \leq x \leq 3$ grafisch dar.

b) Bestimme die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$

c) Zeichne die Umkehrfunktion ebenfalls ins Koordinatensystem ein.

d) Berechne allfällige Schnittpunkte der Graphen von $f(x)$ und $f^{-1}(x)$.

A.3) Gegeben ist die Funktion $f: y = \frac{x^2}{9}$

Skizziere den Graphen dieser Funktion und finde eine Funktionsgleichung für einen Graphen, der gegenüber dem ursprünglichen um

a) 2 Einheiten nach oben verschoben ist.

b) 3 Einheiten nach links verschoben ist.

c) eine Einheit nach oben und 3 Einheiten nach links verschoben ist.

A.4) Gegeben ist die quadratische Funktion
$p: y = x^2 - 2x$.

Der Graph der Funktion wird

a) zuerst um 3 Einheiten nach rechts verschoben und danach an der y-Achse gespiegelt.

b) zuerst an der y-Achse gespiegelt und danach um 3 Einheiten nach rechts verschoben.

Bestimme die Funktionsgleichung für den neuen Graphen.

A.5) Der Punkt $P\binom{2}{32}$ liegt auf dem Graphen von $y = f(x) = (x+a)^{-5}$. Bestimme den Parameter a.

A.6) Der Punkt $P\binom{2}{8}$ liegt auf dem Graphen von $y = f(x) = \left(\frac{4x+a}{x+2a}\right)^3$. Bestimme den Parameter a.

A.7) Die kubische Funktion $y = x^3 - ax$ hat eine Nullstelle bei $x = 2$. Bestimme den Parameter a. Bestimme allenfalls weitere Nullstellen.

A.8) Der Punkt $P\binom{5}{6}$ liegt auf dem Graphen von $y = f(x) = \sqrt{x^2 + a}$. Bestimme den Parameter a.

A.9) Der Punkt $P\binom{4}{4}$ liegt auf dem Graphen von $y = f(x) = x^3 \cdot \left(\frac{a}{x+2}\right)^4$. Bestimme den Parameter a.

A.10) Um wie viele Einheiten muss man den Graphen von $y = f(x) = \sqrt{x+1}$ vertikal verschieben, damit er durch den Punkt $P\binom{8}{8}$ geht?

A.11) Gegeben sind zwei Funktionen $y = f_1(x) = x^2$ und $y = f_2(x) = \sqrt{162 - x^4}$. Bestimme die Definitionsbereiche von f_1 und f_2, sowie die Schnittpunkte der Graphen.

B.1) Der Graph der Funktion $y = f(x) = 4 \cdot 3^x$ wird zuerst um 2 Einheiten nach links verschoben und dann an der y-Achse gespiegelt. Wie lautet die Funktionsgleichung für den transformierten Graphen?

B.2) Der Graph der Funktion $y = f(x) = 2^x$ wird zuerst zwei Einheiten nach links verschoben und danach an der x- und zuletzt noch an der y-Achse gespiegelt. Bestimme die Funktionsgleichung des resultierenden Graphen.

B.3) Der Graph von $y = 2^x$ wird zuerst um 8 Einheiten vertikal nach unten verschoben und dann an der x-Achse gespiegelt. Bestimme die Funktionsgleichung für den resultierenden Graphen, sowie Schnittpunkte zwischen den beiden Graphen.

B.4) Ein Anfangskapital von €20'000 wächst auf einem ruhenden Konto im Verlaufe von 12 Jahren auf einen Kontostand von €30'221.

a) Bestimme den Zinsfaktor und daraus den Zinssatz.

b) Formuliere eine Funktion für den Kontostand (Zinseszinsformel). Die Anzahl Zinsperioden sei n.

B.5) Gegeben sei die Sättigungsfunktion $y = 200 \cdot (1 - (\frac{3}{4})^x)$.

a) Skizziere die gegebene Funktion im Bereich $0 \leq x \leq 10$.

b) Wo liegt die Sättigungsgrenze? ($\max(y) = ?$).

c) Für welches x ist die Hälfte der Sättigungsgrenze erreicht?

d) Wenn man die Funktion mit einem Parameter a wie folgt schreibt: $y = 200 \cdot [1 - a^x]$, wie muss man dann den Parameter a verändern, damit die Sättigunsgrenze schneller erreicht wird?

B.6) Bei einem radioaktiven Nuklid (O-16) zerfallen in jeder Sekunde 1% der Atomkerne.

a) Wie viele % der Kerne sind nach einer Minute zerfallen?

b) Wie gross ist die Halbwertszeit dieses Nuklids?

B.7) Die sibirische Grenzstadt Krasnajasibirsk hat jetzt nur halb so viele Einwohner wie die Stadt Sosulka. Ihre Einwohnerzahl wächst jedoch jährlich mit 5%, während diejenige von Sosulka mit 3% schrumpft.

a) Schreibe je eine Formel für die Einwohnerzahl der Städte als Funktion der Zeit.

b) Wie lange dauert es, bis Krasnajasibirsk mehr Einwohner hat als Sosulka?

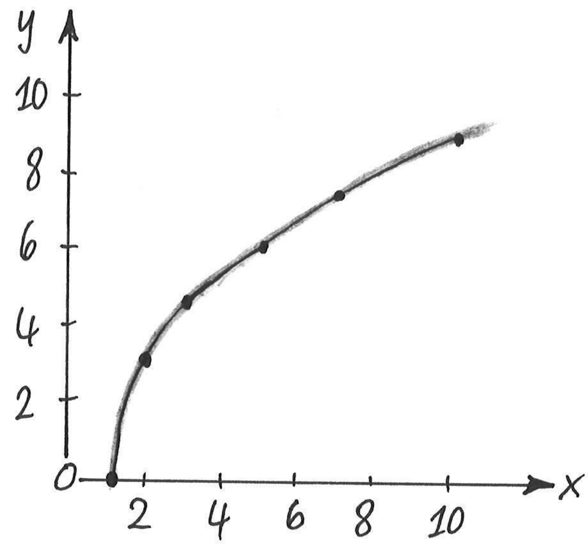
Musterlösungen

A.1)

x	1	2	3	5	7	10
y	0	3	4.24	6	7.35	9

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$$
$$\mathbb{W} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$$

a)



b) $y = f(x) = 3\sqrt{x-1} \longrightarrow x = 3 \cdot \sqrt{y-1} \xrightarrow{:3}$

$\frac{x}{3} = \sqrt{y-1} \xrightarrow{\text{quadr.}} \frac{x^2}{9} = y - 1 \xrightarrow{+1} y = \frac{x^2}{9} + 1$

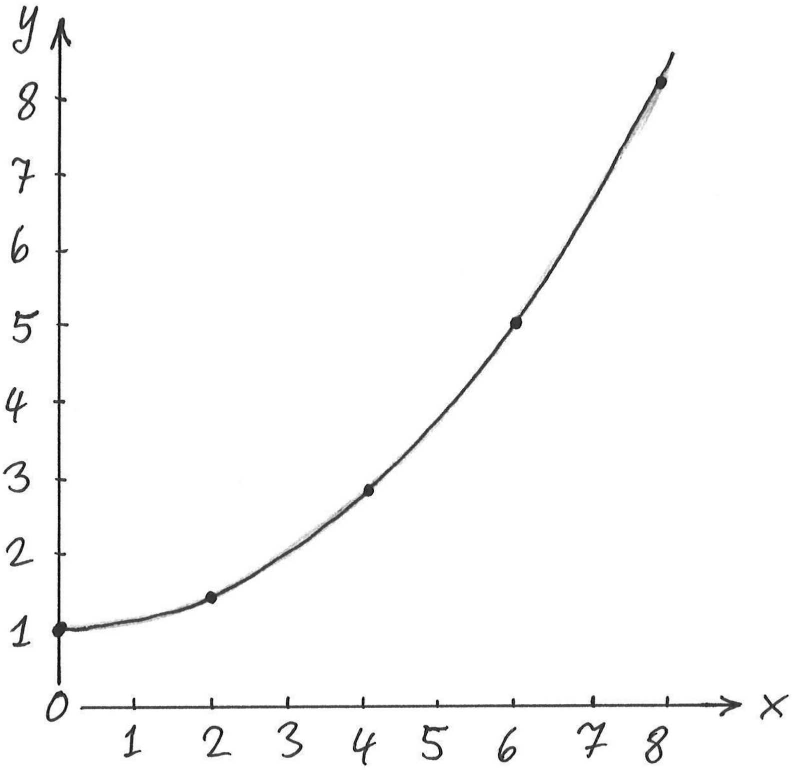
$y = \frac{x^2+9}{9}, \; x \geq 0$

Der Definitionsbereich der Umkehrfunktion ist gleich dem Wertebereich der ursprünglichen Funktion

$y = f^{-1}(x) = \frac{x^2+9}{9}, \; x \geq 0$

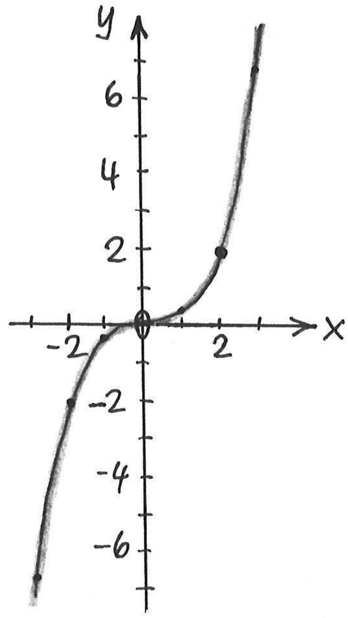
c)

x	0	2	4	6	8
y	1	1.44	2.78	5	8.11



A.2a)

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−6.75	−2	−0.25	0	0.25	2	6.75

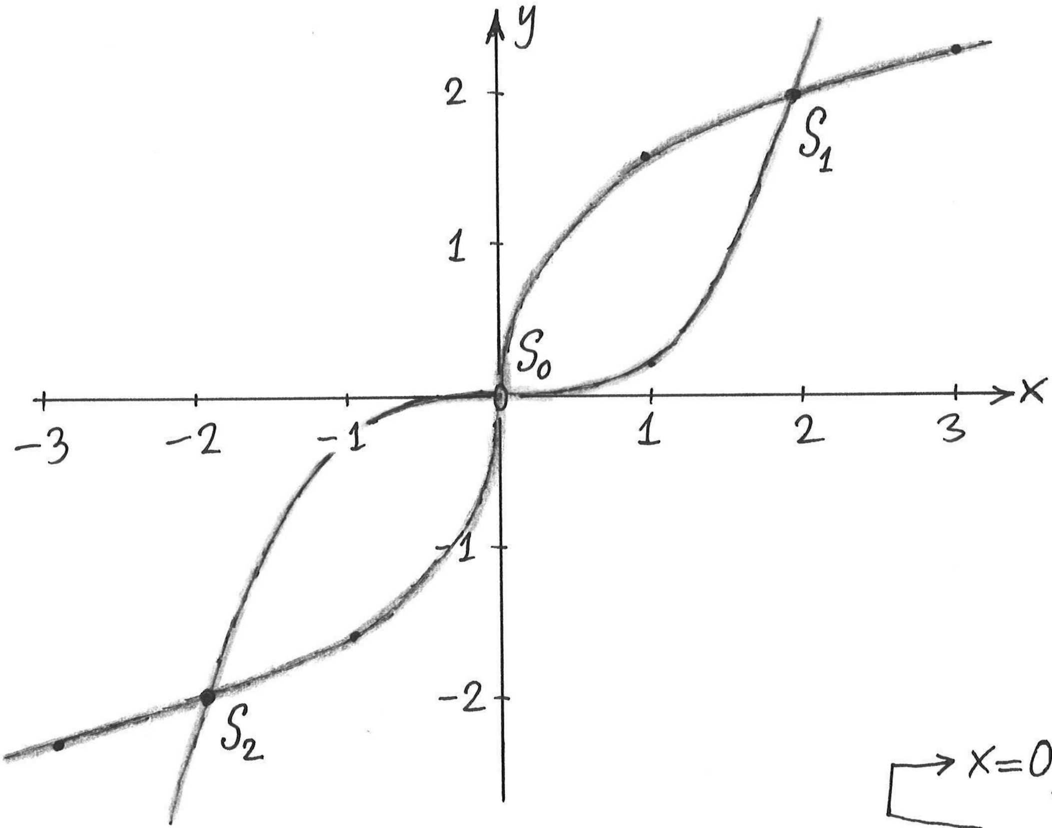


b) $y = f(x) = \frac{x^3}{4} \rightarrow x = \frac{y^3}{4} \rightarrow y^3 = 4x \rightarrow$

$$\underline{\underline{y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{4x}}}$$

c)

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−2.29	−2	−1.59	0	1.59	2	2.29



d) $f \cap f^{-1}$: $\frac{x^3}{4} = \sqrt[3]{4x} \xrightarrow{(\ldots)^3} \frac{x^9}{64} = 4x \rightarrow x = 0 \rightarrow \underline{\underline{S_0\binom{0}{0}}}$

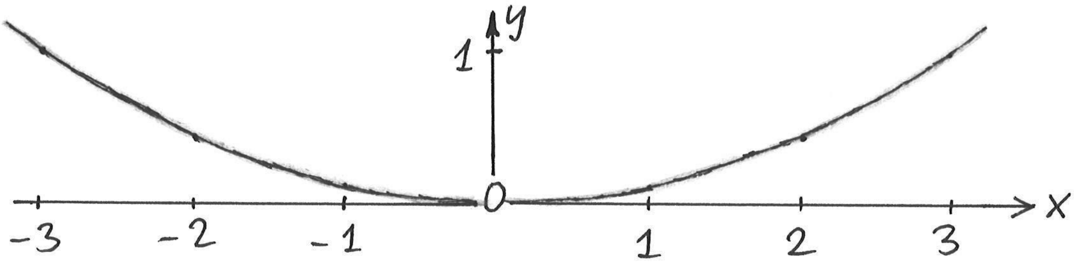
$\xrightarrow{\cdot 64/x} x^8 = 256 \xrightarrow{\sqrt[8]{\ldots}} x = \pm 2$

$y = \frac{x^3}{4} = \frac{\pm 8}{4} = \pm 2$

$$\underline{\underline{S_1\binom{2}{2} \quad S_2\binom{-2}{-2}}}$$

A.3)

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	1	0.44	0.11	0	0.11	0.44	1



a) $y-2=\frac{x^2}{9} \xrightarrow{+2} y=2+\frac{x^2}{9}=\underline{\underline{\frac{x^2+18}{9}}}$

b) $\underline{\underline{y=\frac{(x+3)^2}{9}}}$

c) $y-1=\frac{(x+3)^2}{9} \xrightarrow{+1} y=\frac{(x+1)^2}{9}+1=\underline{\underline{\frac{(x+3)^2+9}{9}}}$

$\underline{\underline{y=\frac{x^2+6x+18}{9}}}$

A.4a) $y=x^2-2x \xrightarrow{x\to x-3} y=(x-3)^2-2\cdot(x-3)$

$=(x-3)\cdot(x-3-2)=(x-3)\cdot(x-5)$

$=x^2-8x+15 \xrightarrow{x\to -x} y=(-x)^2-8\cdot(-x)+15$

$\underline{\underline{y=x^2+8x+15}}$

b) $y=x^2-2x \xrightarrow{x\to -x} y=(-x)^2-2\cdot(-x)=x^2+2x$

$\xrightarrow{x\to x-3} y=(x-3)^2+2\cdot(x-3)=(x-3)\cdot(x-3+2)$

$=(x-3)\cdot(x-1)=x^2-4x+3$

$\underline{\underline{y=x^2-4x+3}}$

A.5) $P\binom{2}{32}\in G_f: 32=(2+a)^{-5} \xrightarrow[\text{wert}]{\text{Kehr-}}$

$(2+a)^5=\frac{1}{32} \xrightarrow{\sqrt[5]{\dots}} a+2=\sqrt[5]{\frac{1}{32}}=\frac{1}{2} \,\Big|-2$

$\underline{\underline{a=-\frac{3}{2}}}$

A.6) $P\binom{2}{8} \in G_f: \; 8 = \left(\frac{4 \cdot 2 + a}{2 + 2a}\right)^3 = \left(\frac{a+8}{2 \cdot (a+1)}\right)^3$

$\xrightarrow{\sqrt[3]{\ldots}} \sqrt[3]{8} = \frac{a+8}{2 \cdot (a+1)} = 2$

$HN = 2 \cdot (a+1) \longrightarrow \frac{a+8}{2 \cdot (a+1)} = \frac{2 \cdot 2 \cdot (a+1)}{2 \cdot (a+1)} \longrightarrow$

$a + 8 = 4a + 4 \xrightarrow{-a-4} 4 = 3a \xrightarrow{:3} \underline{\underline{a = \frac{4}{3}}}$

A.7) $x = 2 \longrightarrow y = 0 = 2^3 - 2a = 8 - 2a \xrightarrow{+2a} 2a = 8$

$\xrightarrow{:2} \underline{\underline{a = 4}}$

A.8) $P\binom{5}{6} \in G_f: 6 = \sqrt{5^2 + a} \xrightarrow{\text{quadr.}} 36 = 25 + a$

$\xrightarrow{-25} \underline{\underline{a = 11}}$

A.9) $P\binom{4}{4} \in G_f: \; 4 = 4^3 \cdot \left(\frac{a}{4+2}\right)^4 = 64 \cdot \frac{a^4}{6^4}$

$= \frac{64}{1296} a^4 = \frac{4a^4}{81} \longrightarrow 4 = \frac{4a^4}{81}$

$HN = 81 \longrightarrow \frac{4 \cdot 81}{81} = \frac{4a^4}{81} \longrightarrow a^4 = 81$

$\xrightarrow{\sqrt[4]{\ldots}} a = \pm\sqrt[4]{81} = \underline{\underline{\pm 3}}$

A.10) $y - a = \sqrt{x+1} \xrightarrow{+a} y = \sqrt{x+1} + a$

$P\binom{8}{8} \in G_f: 8 = \sqrt{8+1} + a = 3 + a \;/ -3$

$\underline{\underline{a = 5}}$

Antw.: Der Graph muss um 5 Einheiten nach oben verschoben werden.

A.11) $y = f_1(x) = x^2 \longrightarrow \underline{\underline{\mathbb{D}_1 = \mathbb{R}}}$

$y = f_2(x) = \sqrt{162 - x^4} \longrightarrow x^4 \leq 162 \longrightarrow$

$$-\sqrt[4]{162} \le x \le \sqrt[4]{162} \longrightarrow -3.568 \le x \le 3.568$$

$$\longrightarrow \underline{\underline{\mathbb{D}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid -3.568 \le x \le 3.568\}}}$$

B.1) $y = 4 \cdot 3^x \xrightarrow{x \to x+2} y = 4 \cdot 3^{x+2} = 4 \cdot 3^2 \cdot 3^x$

$= 36 \cdot 3^x \xrightarrow{x \to -x} \underline{\underline{y = 36/3^x}}$

B.2) $y = 2^x \xrightarrow{x \to x+2} y = 2^{x+2} = 2^2 \cdot 2^x = 4 \cdot 2^x$

$\xrightarrow{y \to -y} y = -4 \cdot 2^x \xrightarrow{x \to -x} y = -4 \cdot 2^{-x} = \frac{-4}{2^x}$

$$\underline{\underline{y = \frac{-4}{2^x} = -2^{(2-x)}}}$$

B.3) $y = 2^x \xrightarrow{y \to y+8} y+8 = 2^x \xrightarrow{-8} y = 2^x - 8$

$\xrightarrow{y \to -y} \underline{\underline{y = 8 - 2^x}}$

Schnittpunkt: $2^x = 8 - 2^x \xrightarrow{+2^x} 2 \cdot 2^x = 8 \xrightarrow{:2}$

$2^x = 4 \xrightarrow{lg \dots} x \cdot lg\,2 = lg\,4$

$\xrightarrow{:lg\,2} \left.\begin{array}{l} x = lg\,4 / lg\,2 = 2 \\ y = 2^x = 2^2 = 4 \end{array}\right\} \underline{\underline{S\binom{2}{4}}}$

B.4a) $K_{12} = 30'221 = 20'000 \cdot q^{12}$ Zinsfaktor: $q = 1 + \frac{p}{100}$

$\xrightarrow{:20'000} q^{12} = \frac{30'221}{20'000} = 1.511$

$\xrightarrow{\sqrt[12]{\dots\dots}} q = \sqrt[12]{1.511} = 1.035 = 1 + \frac{p}{100} \xrightarrow{-1}$

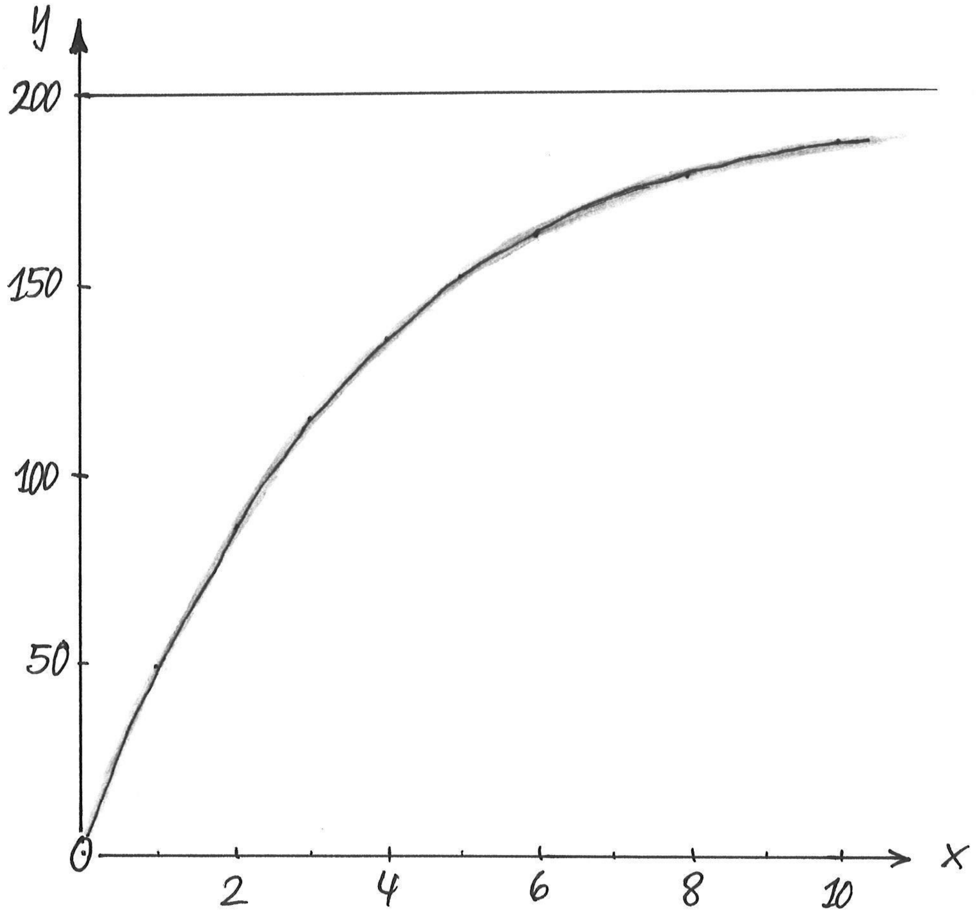
$\frac{p}{100} = 0.035 \xrightarrow{\cdot 100} p = 3.5$

Antwort: Der Zinsfaktor ist $\underline{\underline{1.035}}$ und der Zinssatz ist $\underline{\underline{3.5\%}}$

b) $\underline{\underline{K_n = 20'000 \cdot 1.035^n}}$

B.5a)

x	0	1	2	3	4	5	6	8	10
y	0	50	87.5	116	137	153	164	180	189



b) $\underline{\underline{\max(y) = 200}}$

c) $\frac{200}{2} = 100 = 200 \cdot \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^x\right] \xrightarrow{:200} \frac{100}{200} = \frac{1}{2} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^x$

$\xrightarrow{+(3/4)^x - 1/2} \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\lg \ldots} x \cdot \lg 3/4 = \lg 1/2$

$\xrightarrow{:\lg 3/4} x = \lg(1/2) / \lg(3/4) = \underline{\underline{2.41}}$

d) Man muss a kleiner machen, z. B. wenn $a = 1/4$ (anstatt $3/4$) gilt $y(1) = 200\left[1 - (1/4)^1\right] = 150$. Für $a = 3/4$ war $y(1) = 50$, d. h. y war weiter von der Sättigungsgrenze entfernt.

B.6a) $N_x = N_0 \cdot 0.99^x$

Anzahl zerfallene Kerne: $N_0 - N_x = N_0 \cdot [1 - 0.99^x]$

In %: $\dfrac{N_0 - N_x}{N_0} \cdot 100\% = (1 - 0.99^x) \cdot 100\%$

$x = 60 \longrightarrow (1 - 0.99^{60}) \cdot 100\% = \underline{\underline{45.3\%}}$

b) $N_x = \dfrac{N_0}{2} = N_0 \cdot 0.99^x \xrightarrow{:N_0} \dfrac{1}{2} = 0.99^x$

$\xrightarrow{\lg \ldots} \lg 1/2 = x \cdot \lg 0.99 \xrightarrow{:\lg 0.99} x = \dfrac{\lg 1/2}{\lg 0.99} = 69$

Antwort: Die Halbwertszeit des Nuklids ist $\underline{\underline{69\,s}}$

B.7a) $\boxed{\begin{aligned} N_K &= \frac{N_0}{2} \cdot 1.05^x \\ N_S &= N_0 \cdot 0.97^x \end{aligned}}$

b) $\dfrac{N_0}{2} \cdot 1.05^x = N_0 \cdot 0.97^x \xrightarrow{:N_0/2} 1.05^x = 2 \cdot 0.97^x$

$\xrightarrow{:0.97^x} \dfrac{1.05^x}{0.97^x} = \left(\dfrac{1.05}{0.97}\right)^x = 1.0825^x = 2$

$\xrightarrow{\lg \ldots} x \cdot \lg 1.0825 = \lg 2 \xrightarrow{:\lg 1.0825}$

$x = \dfrac{\lg 2}{\lg 1.0825} = 8.75$

Antwort: Es dauert $\underline{\underline{9 \text{ Jahre}}}$