FACHHOCHSCHULE ZÜRICH

Musterprüfung *Mathe II* *Klasse K2*

5. Mai 2009

A

Aufgabe 1: Eine Gerade g im dreidimensionalen Raum geht durch die Punkte $A\begin{pmatrix}8\\-3\\5\end{pmatrix}$ und $B\begin{pmatrix}-4\\6\\8\end{pmatrix}$. Für welchen Punkt auf g ist die Summe der Koordinaten gleich 10, d.h. x + y + z = 10?

Aufgabe 2: Welchen Winkel schliessen die Vektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ ein?

Aufgabe 3: Zwei Vektoren **a** und **b** sind gegeben wie folgt:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix}-8\\4\\q\end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b} = \begin{pmatrix}-14\\2\\5\end{pmatrix}.$$

a) Wie gross ist der von **a** und **b** eingeschlossene Winkel wenn q = 1?
b) Wie gross muss q sein, damit **a** und **b** senkrecht aufeinander stehen?

Aufgabe 4: Gegeben sind zwei Vektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}5\\6\\1\end{pmatrix}$. Bestimme eine Linearkombination von **a** und **b** wie folgt: $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ so, dass **c** senkrecht auf **a** steht.

Aufgabe 5: Welcher Punkt auf der y-Achse liegt vom Punkt $A\begin{pmatrix}12\\0\\-6\end{pmatrix}$ doppelt so weit entfernt wie vom Punkt $B\begin{pmatrix}6\\3\\3\end{pmatrix}$?

Aufgabe 6: Bestimme den Wert des Parameters q so, dass die Vektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix}1\\q\\0\end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}0\\q\\1\end{pmatrix}$ einen Winkel von 60º einschliessen.

Aufgabe 7: Bestimme den Wert des Parameters q so, dass die Vektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix}q\\2\\2\end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ einen Winkel von 135º einschliessen.

Aufgabe 8: Bestimme den Innenwinkel α des Dreiecks mit den Eckpunkten $A\begin{pmatrix}5\\-2\\4\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}6\\4\\-1\end{pmatrix}$ und $C\begin{pmatrix}0\\5\\3\end{pmatrix}$.

Aufgabe 9: Bestimme den Parameter q so, dass die Vektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} q+2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} q-3 \\ 2 \\ q \end{pmatrix}$ senkrecht aufeinander stehen.

Aufgabe 10: Eine Gerade g_1 geht durch den Punkt $P\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ und schneidet die Gerade g_2: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bei $x = 7$. Bestimme eine Gleichung für g_1.

Aufgabe 11: Gegeben sind zwei Vektoren wie folgt: $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Bestimme die Grössen p und q in **a** so, dass er senkrecht auf **b** steht und sein Betrag gleich 7 wird, d.h. $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ und $|\mathbf{a}| = 7$.

Aufgabe 12: Zwei Ebenen sind gegeben wie folgt: E_1: $4x - ay + z - 1235 = 0$ und E_2: $ax + 2y - 4z + 233 = 0$. Bestimme den Parameter a so, dass die beiden Ebenen senkrecht zueinander stehen.

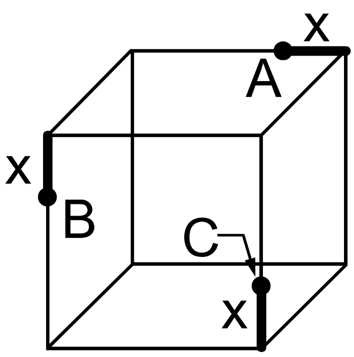
Aufgabe 13: Die Gerade g geht durch die Punkte $A\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $B\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. Sie steht senkrecht zu einer Ebene E, die durch den Koordinatenursprung geht.

a) Bestimme eine Koordinatengleichung für E.
b) Bestimme den Durchstosspunkt von g mit E.

Aufgabe 14: Die Ebene E geht durch die x-Achse und verläuft parallel zur Geraden g. Bestimme eine Koordinatengleichung für E, wenn g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 15: Die Spitze eines geraden Kreiskegels befindet sich im Punkt $S\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$ und der Mittelpunkt seiner Grundfläche liegt im Punkt $M\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Auf der Geraden g durch die Kegelspitze S und den Punkt $A\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ liegt eine Mantellinie des Kreiskegels. Berechne den Radius der Grundfläche des Kreiskegels.

Aufgabe 16: Auf Kanten eines Würfels liegen, wie in nebenstehender Skizze dargestellt, die Punkte A, B und C im Abstand x von Eckpunkten des Würfels.
Berechne **einen** (beliebigen) Innenwinkel des Dreiecks ABC, wenn $x = s/3$.



Aufgabe 17: Wenn man den Punkt $P\begin{pmatrix}2\\3\\9\end{pmatrix}$ an der Ebene E spiegelt, so erhält man den Punkt P*. Bestimme P*, wenn E: $2x + y - 3z - 8 = 0$.

Aufgabe 18: Die Gerade g geht durch die Punkte $A\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$ und $B\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$. Ein weiterer Punkt $C\begin{pmatrix}6\\6\\-12\end{pmatrix}$ ist gegeben. Bestimme

a) die Fläche des Dreiecks ABC.
b) den Abstand des Punktes C von g.

Musterlösungen:

1. Für alle Punkte auf g gilt $x + y + z = 10$

2. 109.11º

3. a) 22.19º. (b) $q = -24$

4. $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3+5\lambda\\2+6\lambda\\1+\lambda\end{pmatrix} = 14(1+2\lambda) = 0 \rightarrow \lambda = -½$

5. $\sqrt{12^2 + y^2 + 6^2} = 2\sqrt{6^2 + (y-3)^2 + 9} \rightarrow A\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}$ und $B\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix}1\\q\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\q\\1\end{pmatrix} = q^2 = (q^2+1) \cdot ½ \rightarrow q = \pm 1$

7. $\begin{pmatrix}q\\2\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} = -q - 2 = -\sqrt{q^2 + 8} \rightarrow q = 1$

8. 51.98º

9. $q \in \{-4, 2\}$

10. $7 = 1 + 2\lambda \rightarrow \lambda = 3 \rightarrow g_1 \cap g_2 = S\begin{pmatrix} 7 \\ -11 \\ 8 \end{pmatrix} \rightarrow g_1\text{:} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

11. $|\mathbf{a}| = 7 \rightarrow p^2 + q^2 + 9 = 49$. $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \rightarrow 3p - 2q = -6 \rightarrow$
2 Lösungen: $p_1 = 2$ und $q_1 = 6$; $p_2 = -62/13$ und $q_2 = -54/13$

12. $\begin{pmatrix} 4 \\ -a \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 2a - 4 = 0 \rightarrow a = 2$

13. g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. (a) E: $2x - y - z = 0$. (b) $E \cap g \rightarrow \lambda = -1 \rightarrow S\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow$ E: $2y - z = 0$

15. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow$ E: $x - 2y - 2z + d = 0$. $M\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \in E \rightarrow d = 8 \rightarrow$ E: $x - 2y - 2z + 8 = 0$.
g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow g \cap E = P\begin{pmatrix} 6.8421 \\ 3.2632 \\ 4.1579 \end{pmatrix} \rightarrow r = \overline{MP} = 1.6102$

16. Annahme Kantenlänge = 3 $\rightarrow A\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $C\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \alpha = 49.99^\circ, \beta = \gamma =$ 65.00°

17. $P^*\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$

18. a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 \\ 36 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow A = 22.5$. (b) $\delta = 5$