FACHHOCHSCHULE ZÜRICH

Musterprüfung Mathe 2 Klasse ZS K2*
1. Juni 2010

Themen:

- Goniometrie: Es kommen vier Typen goniometrischer Gleichungen vor wie folgt:
  Typus A: $f(ax + b) = c$ mit $f \in \{\sin, \cos, \tan\}$
  Typus B: $a\,f(x + b) = c\,f(x + d)$ mit $f \in \{\sin, \cos\}$
  Typus C: $f(ax + b) = g(cx + d)$ mit $\{f, g\} \in \{\sin, \cos\}$
  Typus D: $f(n_1 x) \pm f(n_2 x) \pm f(n_3 x) \pm \ldots = 0$ mit $f \in \{\sin, \cos\}$
- Sinussatz und Cosinussatz
- Winkelberechnungen in Figuren
- Körper (Würfel, Quader, Zylinder, gerader Kreiskegel)
- Vektorgeometrie (alles was der Stoffplan vorschreibt!)

1. Berechne Lösungen im Bereich $0 \le \alpha \le 360^o$ von $|\sin(3\alpha + 150^o)| = ½$.

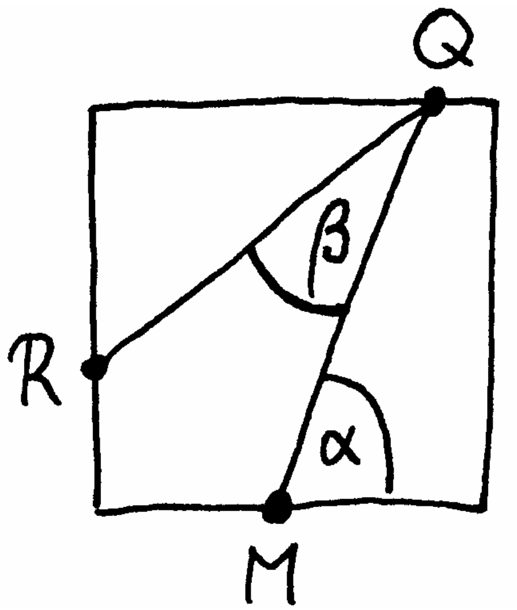
2. Berechne Lösungen im Bereich $0 \le \alpha \le 360^o$ von $3 \sin(2\alpha - 30^o) - 4 \cos(2\alpha + 40^o) = 0$.

3. Berechne Lösungen im Bereich $0 \le \alpha \le 360^o$ von $\sin(3\alpha - 50^o) + \cos(2\alpha - 40^o) = 0$.

4. Berechne Lösungen im Bereich $0 \le \alpha \le 360^o$ von $\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x = 0$.

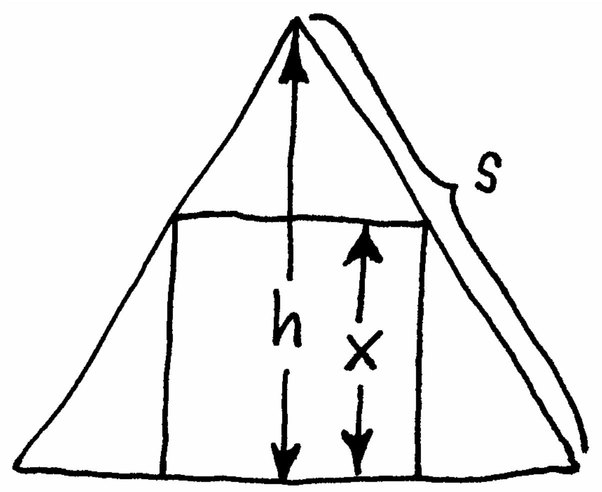
5. Von einem allgemeinen Dreieck kennt man die Seite c und die Summe der Seiten a und b. Ausserdem ist $\gamma = 60^o$. Wie gross sind die Seiten a und b, wenn $a + b = 12$ und $c = 8$?

6. Ein Quadrat wird, wie in nebenstehender Figur illustriert, durch einen Streckenzug durch die drei Punkte M,Q und R in drei flächengleiche Stücke zerlegt. Der Punkt M liegt in der Mitte einer Quadratseite. Wie gross sind die Winkel α und β?



* Lösungen verschiedener Aufgaben sollen durch waagrechte Striche voneinander getrennt werden. Die Verwendung roter Farbe soll soweit möglich vermieden werden. Resultate werden doppelt unterstrichen oder eingerahmt. Ergebnisse ohne Lösungsweg werden nicht bewertet.

7. Bei einem geraden Kreiskegel der Höhe h sind die Mantellinien s gleich lang wie der Durchmesser der Grundfläche. Dem Kreiskegel wird, wie in nebenstehender Figur illustriert, ein gerader Kreiszylinder der Höhe x einbeschrieben. Wie gross ist x ausgedrückt in h, wenn die Oberfläche des Zylinders halb so gross ist wie die Oberfläche des Kreiskegels?



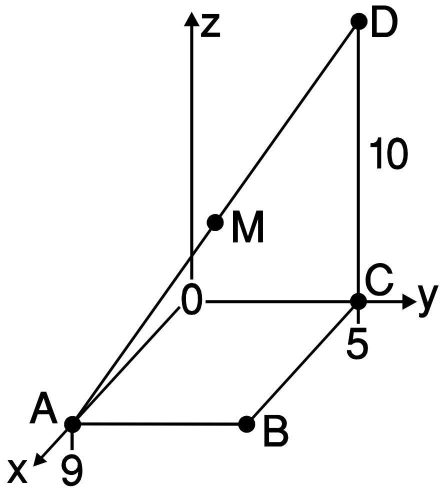
8. In nebenstehender Figur bilden der Koordinatenursprung und die Punkte A, B und C die Eckpunkte eines in der Grundrissebene Π_1 liegenden Rechtecks. Der Punkt D liegt oberhalb von C. M ist der Mittelpunkt von $\overline{AD}$. Bestimme folgendes:

a) $\overline{AD}$.

b) Eine Gleichung für die Gerade durch die Punkte A und D.

c) Den $\angle BMC$.

d) Die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten B, C und M.



9. Stelle den Vektor **c** dar als eine Linearkombination der Vektoren **a** und **b**. Es sei $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$, und $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix}$.

10. Zwei Vektoren **a** und **b** sind gegeben wie folgt: $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} q \\ 7 \\ q \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2q \\ 5 \\ -19 \end{pmatrix}$. Für welchen Wert des Parameters q gilt $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$?

11. Eine Gerade g ist gegeben wie folgt: g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$. Für welchen Punkt P auf der Geraden g ist die x-Koordinate doppelt so gross wie die y-Koordinate?

12. Für welchen Punkt P auf der Geraden g ist die Entfernung vom Koordinatenursprung gleich 45? Es sei g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -18 \\ 3 \end{pmatrix}$.

13. Zwei Vektoren **a** und **b** sind gegeben wie folgt: $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 44 \\ q \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \\ -13 \end{pmatrix}$. Für welchen Wert des Parameters q ist der von **a** und **b** eingeschlossene Winkel gleich 76^o?

14. Zwei Vektoren **a** und **b** sind gegeben wie folgt: $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} q \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} q \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Für welchen Wert des Parameters q spannen **a** und **b** ein Vektorparallelogramm mit einer Fläche von 12 auf?

Musterlösungen:

1. $\alpha \in \{0^o, 20^o, 60^o, 80^o, 120^o, 140^o, 180^o, 200^o, 240^o, 260^o, 300^o, 320^o, 360^o\}$

2. $\alpha \in \{20.721^o, 110.721^o, 200.721^o, 290.721^o\}$

3. $\alpha \in \{0^o, 72^o, 144^o, 216^o, 280^o, 288^o, 360^o\}$

4. $\alpha \in \{0^o, 36^o, 90^o, 108^o, 180^o, 252^o, 270^o, 324^o, 360\}$

5. Cosinussatz: $c^2 = a^2 + (12 - a)^2 - a(12 - a) \rightarrow 3a^2 - 36a + 144 - c^2 = 0 \rightarrow a = 9.055$ und $b = 2.945$ oder umgekehrt.

6. $\alpha = \arctan 3 = 71.565^o$ und $\beta = \alpha - \arctan(24/25) = 27.734^o$

7. $S_{Zylinder} = ½\, S_{Kegel} \rightarrow 2\pi r(x + r) = ½\, \pi R(R + s)$, $s = 2R$, $x = h(1 - r/R) = \sqrt{3}\,(R - r)$, $4r(\sqrt{3}(R - r) + r) = 3R^2 \rightarrow (\sqrt{3} - 1)r^2 - \sqrt{3}Rr + ¾\, R^2 = 0$, $r = \sqrt{3}[(1 \pm \sqrt{2 - \sqrt{3}})/(2(\sqrt{3} - 1))]R \rightarrow r = 0.57064R$

8. a) $\overline{AD} = \sqrt{206} = 14.353$

   b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix}$

   c) $\varphi = \arccos(22/103) = 77.67^o$

   d) $½ \left| \begin{pmatrix} 9/2 \\ 5/2 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -9/2 \\ 5/2 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = 25.156$

9. $\mathbf{c} = 3\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$

10. $2q^2 - 19q + 35 = 0 \rightarrow q_1 = 7$ und $q_2 = 5/2$

11. $\lambda = 4$, $P\begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ -7 \end{pmatrix}$

12. $\lambda_1 = 1944/674 \rightarrow P_1\begin{pmatrix} -1.7685 \\ -43.9169 \\ 9.6528 \end{pmatrix}$ und $\lambda_2 = -2 \rightarrow P_2\begin{pmatrix} 8 \\ 44 \\ -5 \end{pmatrix}$

13. $18q + 160 = 23 \cdot \sqrt{q^2 + 2000} \cdot \cos 76^o \;\rightarrow\; 18^2 q^2 + 2 \cdot 18 \cdot 160\, q + 160^2 = 23^2 \cos^2 76^o [q^2 + 2000] \;\rightarrow\; (18^2 - 23^2 \cos^2 76^o)\, q^2 + 5760\, q - 160^2 - 23^2 \cdot 2000 \cdot \cos^2 76^o = 0 \;\rightarrow\; 293.04\, q^2 + 5760\, q - 36'320.7 = 0 \;\rightarrow\; q = 5.0224$ (ausserdem eine Scheinlösung $q = -24.6784$)

14. $\left| \begin{pmatrix} q \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} q \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{20q^2 + 64} = 12 \;\rightarrow\; 20q^2 + 64 = 144 \;\rightarrow\; 20q^2 = 80 \;\rightarrow\; q = \pm 2$