
Fach: Mathematik I

Zeitpunkt: Februar 2010, 120 Minuten

Dieses Aufgabenblatt bleibt nach der Prüfung im Besitze der Studierenden und muss nicht mit den Lösungen abgegeben werden.

<u>Klassen</u>	Zulassungsstudium Beginn August 2009
<u>Examinator</u>	Prof. Dr.h.c. Bedi Büktas, Rektor der Hochschule für Technik Zürich
<u>Erlaubte Hilfsmittel</u>	- Eine persönlich erstellte und/oder eine gedruckte Formelsammlung (handschriftliche Einträge ohne Lösungsansätze sind erlaubt) - Ein elektronischer Rechner
<u>Bewertungsschema</u>	Pro Aufgabe total 3 Punkte --> Maximal 24 Punkte

<u>Notengebung</u>	<u>Anzahl Punkte</u>	<u>Note</u>
(Anz. Punkte / 4 + 1)	24,23,22,21,20,19	6.0
	18,17	5.5
	16,15	5.0
	14,13	4.5
	12,11	4.0
	10,9	3.5
	8,7	3.0
	6,5	2.5
	4,3	2.0
	2,1	1.5
	0	1.0

<u>Wichtig</u>	- Bei jeder Aufgabe muss der Lösungsweg in allen Schritten nachvollziehbar sein, ansonsten die Aufgabe nicht bewertet würde - Erratene Lösungen werden nicht bewertet - Für jede Aufgabe ist ein separates Blatt, versehen mit Name und Vorname, zu verwenden - Die Lösungsblätter sind nur einseitig zu beschriften
----------------	---

AUSZUG AUS DEM REGLEMENT

IV. PRÜFUNGSBESTIMMUNGEN, § 13 (Ausschluss von Zertifikatsprüfungen bzw. Gesamtprüfung)

Ein Ausschluss von den Prüfungen erfolgt, wenn

- der/die Studierende unerlaubte Hilfsmittel verwendet oder in anderer schwerwiegender Weise gegen die Prüfungsordnung verstösst
- der/die Studierende ohne zwingenden Grund einer Prüfung ganz oder teilweise fernbleibt
- sich auch nachträglich ein offenkundiger und belegbarer Betrug herausstellt.

Wird ein Ausschluss ausgesprochen, gilt die ganze Zertifikats- oder Gesamtprüfung als nicht bestanden. Die Studierenden werden ausdrücklich auf diese Bestimmungen aufmerksam gemacht.

Aufgabe 1

Berechnen Sie alle reellen Lösungen für x und y aus dem Gleichungssystem:

$$x^2 - y^2 = 3 \quad \text{und} \quad x^4 = 2y^4 - 7$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie x aus folgender Gleichung:

$$\frac{x+10}{x^2-10x} + \frac{x+5}{x^2-5x} = \frac{x}{x^2-15x+50}$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie x aus folgender Gleichung: $\sqrt{x+8} - \sqrt{x-8} = 2$

Aufgabe 4

Vereinfache $\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}\right) : \left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}} - \frac{1}{1-\frac{1}{x}}\right)$

Aufgabe 5

Berechnen Sie jeweils x aus den Gleichungen:

- a) $5^{2x} - 5^{2x-2} - 24 = 0$
- b) $\log_b(x^2) - \log_b(x-2) = 5 \log_b(3) - \log_b(27)$

Aufgabe 6

Berechnen Sie die Schnittpunkte der Funktionen:

$$y = |x| \quad \text{und} \quad y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 2$$

Aufgabe 7

Berechnen Sie die komplexe Zahl z aus der Gleichung:

$$\frac{4-i}{z-i} - \frac{2+i}{z+i} = 2 \frac{3+4i}{z^2+1}$$

Aufgabe 8

In der quadratischen Gleichung $x^2 - 9x + q = 0$ soll der Parameter q so berechnet werden, dass 20-mal die Summe der Quadrate der Lösungen dem 41-fachen des Produktes der Lösungen entspricht.

WIR WÜNSCHEN IHNEN VIEL ERFOLG !

Musterlösungen:

ZLSAP Feb. 2010

1.) $x^2 = y^2 + 3 \rightarrow x^4 = y^4 + 6y^2 + 9 = 2y^4 - 7 \rightarrow y^4 - 6y^2 - 16 =$

$(y^2 - 8) \cdot (y^2 + 2) = 0, x = \pm \sqrt{y^2 + 3}$

$y = \pm 2\sqrt{2} \quad \underline{\underline{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{11} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{11} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{11} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{11} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}}}$

2.) $\frac{x+10}{x(x-10)} + \frac{x+5}{x(x-5)} = \frac{x}{(x-10)(x-5)}, \text{HN} = x(x-5)(x-10)$

$(x+10) \cdot (x-5) + (x+5) \cdot (x-10) = x^2, \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, 5, 10\}$

$x^2 - 100 = 0 \rightarrow x = \pm 10 \rightarrow \underline{\underline{x = -10}}, \{10\} \notin \mathbb{D}$

3.) $\sqrt{x+8} - \sqrt{x-8} = 2 \xrightarrow{\text{quad.}} x+8 - 2\sqrt{x^2-64} + x-8 = 4 \rightarrow$

$\sqrt{x^2-64} = x-2 \xrightarrow{\text{quad.}} x^2-64 = x^2-4x+4 \rightarrow \underline{\underline{x=17}}$

Probe: $\sqrt{17+8} - \sqrt{17-8} = 5 - 3 = 2 \checkmark$

4.) $\left(\frac{1-x}{1-x^2} - \frac{1+x}{1-x^2}\right) : \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) = \left(\frac{-2x}{1-x^2}\right) : \left(\frac{x}{1+x} + \frac{x}{1-x}\right) =$

$\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right) : \left(x \left[\frac{1-x}{1-x^2} + \frac{1+x}{1-x^2}\right]\right) = \left(\frac{-2x}{1-x^2}\right) : \left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = \underline{\underline{-1}}$

5. a) $5^{2x} \left(1 - \frac{1}{25}\right) = 5^{2x} \cdot \frac{24}{25} = 24 \rightarrow 5^{2x} = 25 = 5^2 \rightarrow \underline{\underline{x=1}}$

b) $\log_5(x^2/(x-2)) = \log_5(3^5/3^3) \rightarrow x^2/(x-2) = 9 \rightarrow$

$x^2 - 9x + 18 = (x-6) \cdot (x-3) = 0 \rightarrow \underline{\underline{x_1=6}} \text{ und } \underline{\underline{x_2=3}}$

6.) $x > 0 \rightarrow y = x = -1/2(x-1)^2 + 2 \rightarrow x^2 - 3 = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{3}$

$x < 0 \rightarrow y = -x = -1/2(x-1)^2 + 2 \rightarrow x^2 - 4x - 3 = 0 \rightarrow x = 2 \pm \sqrt{7}$
 $\rightarrow x_2 = 2 - \sqrt{7} = -0.646$

7.) $\frac{4-i}{z-i} - \frac{2+i}{z+i} = \frac{6+8i}{z^2-i^2} \rightarrow \frac{(4-i)z + 1+4i}{z^2-i^2} - \frac{(2+i)z + 1-2i}{z^2-i^2} = \frac{6+8i}{z^2-i^2} \rightarrow$

$[4-i-2-i]z + 1+4i-1+2i = 2[(1-i)z + 3i] = 2(3+4i) \rightarrow$

$\rightarrow z = (3+i)/(1-i) = \underline{\underline{1+2i}}$

$S_1 \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, S_2 \begin{pmatrix} -0.646 \\ 0.646 \end{pmatrix}$

8.) Vieta: $x_1 + x_2 = 9$ und $x_1 \cdot x_2 = 9$

$(x_1 + x_2)^2 = 9^2 = 81 \rightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = \frac{41}{20}x_1x_2 + 2x_1x_2 = \left(\frac{41}{20} + 2\right)9$

$= 819/20 = 9^2 \rightarrow \underline{\underline{9=20}}$